

# MATEMÁTICA

## ARITMÉTICA

Sistema de numeração decimal.....	01
Sistema de numeração romana.....	03
Operações fundamentais.....	04
Divisibilidade.....	07
Números primos.....	11
Número de divisores de um número .....	12
Máximo divisor comum (MDC).....	14
Mínimo múltiplo comum (MMC).....	16
Base de um sistema de numeração.....	17
Problemas de sucessão de números naturais.....	19
Frações.....	20
Operações com números decimais.....	30
Dízimas.....	33
Sistema métrico decimal.....	34
Razões e proporções.....	38
Médias.....	45
Números proporcionais.....	46
Redução de complexos.....	48
Regra de três.....	50
Porcentagem.....	55
Juros.....	59

## ALGEBRA

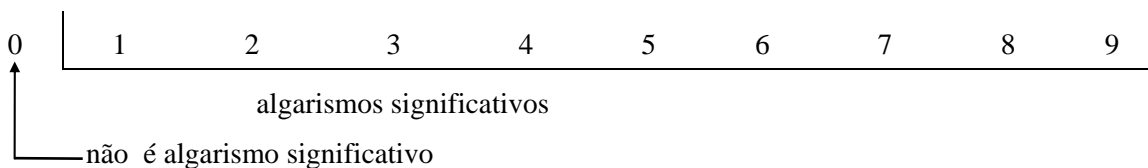
Conjuntos.....	62
Potenciação.....	66
Expressões algébricas.....	71
Produtos notáveis.....	74
Fatoração.....	75
Radicais.....	77
Equações do 1º grau.....	80
Sistema de equação do 1º grau.....	80
Equação do 2º grau.....	82
Inequação do 1º grau.....	83
Inequação do 2º grau.....	84
Sistema de inequação do 2º grau.....	85
<b>Respostas dos exercícios.....</b>	<b>87</b>

## GEOMETRIA

Introdução a geometria.....	89
Ângulos.....	94
Paralelismo.....	96
Triângulos.....	97
Polígonos.....	103
Linhas proporcionais.....	109
Semelhança de triângulos.....	111
Relações métricas nos triângulos.....	118
Área do triângulo.....	124
Área dos quadriláteros notáveis.....	125
Área das figuras circulares.....	126
Razão entre áreas de figuras semelhantes.....	127
Polígonos regulares.....	128
Área dos polígonos regulares.....	130
<b>Respostas dos exercícios.....</b>	<b>131</b>

## 1. SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL OU SISTEMA DE BASE 10

Os algarismos do sistema decimal são:



### **Exemplos:**

menor número de quatro algarismos = 1000

menor número de quatro algarismos diferentes = 1023

menor número de quatro algarismos significativos = 1111

menor número de quatro algarismos significativos diferentes = 1234

maior número de quatro algarismos = 9999

maior número de quatro algarismos diferentes = 9876

### **Exercícios:**

Qual o menor número de três algarismos?

Qual o menor número de três algarismos diferentes?

Qual o menor número de três algarismos significativos?

Qual o menor número de três algarismos significativos diferentes?

A diferença entre o menor número de 4 algarismos significativos e o maior número de 3 algarismos significativos diferentes, vale \_\_\_\_\_.

A diferença entre o maior número de 4 algarismos diferentes e o menor número de 3 algarismos é \_\_\_\_\_.

A soma do maior de 3 algarismos com o menor número de 2 algarismos significativos diferentes, é \_\_\_\_\_.

A diferença entre o menor número de 4 algarismos significativos diferentes e o menor número de 3 algarismos significativos diferentes, é \_\_\_\_\_.

A diferença entre o menor número de 5 algarismos diferentes e o maior número de 4 algarismos, é \_\_\_\_\_.

O produto do menor número de 3 algarismos diferentes pelo menor número de 2 algarismos significativos, é \_\_\_\_\_.

### **Respostas:**

1) 100

4) 123

7) 1011

10) 1122

2) 102

5) 124

8) 1111

3) 111

6) 9776

9) 235

**Obs.:** 1 - Nos sistemas de numeração os números são formados de grupos de unidades que denominamos **ORDENS**. Um grupo de três ordens forma uma **CLASSE**.

... BILHÕES		CLASSE DOS MILHÕES			CLASSE DOS MILHARES			CLASSE DAS UNIDADES		
11 <sup>a</sup>	10 <sup>a</sup>	9 <sup>a</sup>	8 <sup>a</sup>	7 <sup>a</sup>	6 <sup>a</sup>	5 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>	3 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	1 <sup>a</sup>
ORDEM	ORDEM	ORDEM	ORDEM	ORDEM	ORDEM	ORDEM	ORDEM	ORDEM	ORDEM	ORDEM
DEZENA DE BILHÃO	UNIDADES DE BILHÃO	CENTENAS DE MILHÃO	DEZENAS DE MILHÃO	UNIDADES DE MILHÃO	CENTENAS DE MILHAR	DEZENAS DE MILHAR	DEZENAS DE MILHAR	CENTENAS DE UNIDADES	DEZENAS DE UNIDADES	UNIDADES SIMPLES

Um algarismo significativo tem dois valores:

**Valor absoluto** - é o valor que o algarismo tem isoladamente.

Ex.: 3847 → o valor absoluto do algarismo 8 **vale 8**.

**Valor relativo** - é o valor que o algarismo adquire devido a sua posição no número.

Ex.: 3847 → o valor relativo do algarismo 8 é 8 centenas, ou seja, 800.

### Exercícios:

Quantas classes e quantas ordens tem o número 9876543210?

Quantas dezenas são 57 milhões?

A diferença entre os valores relativos dos algarismos 3 e 7 no número 347052, é \_\_\_\_\_.

A diferença entre o valor relativo de 4 e o valor absoluto de 5 no número 3548, é \_\_\_\_\_.

A soma entre os valores absolutos dos algarismos 6 e 7 no número 36557, é \_\_\_\_\_.

O produto entre os valores relativos de 5 e absoluto de 4 no número 34521, vale \_\_\_\_\_.

O quociente entre os valores relativos dos algarismos 1 e 2 no número 1027, é \_\_\_\_\_.

Se intercalarmos um zero entre os algarismos 3 e 4 do numeral 534, que alteração sofre o valor relativo do algarismo 5?

O número formado de 6 unidades de 5<sup>a</sup> ordem, 5 de 3<sup>a</sup> ordem, 2 de 2<sup>a</sup> e 3 de 1<sup>a</sup>, é \_\_\_\_\_.

Em mil cento e trinta e duas unidades de 4<sup>a</sup> ordem, quantas unidades de 3<sup>a</sup> ordem e quantas unidades de 5<sup>a</sup> ordem existem?

Um número constituído de 18 classes, sendo uma incompleta. Quantas ordens poderá ter esse número?

Represente o número constituído por meia unidade de 8<sup>a</sup> ordem, 6 unidades de 4<sup>a</sup> ordem e meia unidade de 2<sup>a</sup> ordem e diga os nomes que recebem a classe e a ordem mais elevada desse número, respectivamente.

### Respostas:

1) 4 classes e 10 ordens

2) 5.700.000

3) 293.000

4) 35

5) 13

6) 2.000

7) 50

8) fica 10 vezes maior

9) 60.523

10) 11.320 de 3<sup>a</sup> ordem e 113 de 5<sup>a</sup> ordem

11) 52 ou 53

12) 5.006.005 classe dos milhões e unidade de milhão.

## 2. SISTEMA DE NUMERAÇÃO ROMANA

Os algarismos romanos são representados por sete letras maiúsculas do nosso alfabeto.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Podemos obter expressões de todos os outros números, observando as cinco regras seguintes:

1ª) As letras I, X, C e M, podem ser repetidas até três vezes.

Ex.:

I = 1	XX = 20	CCC = 300
II = 2	XXX = 30	M = 1000
III = 3	C = 100	MM = 2000
X = 10	CC = 200	MMM = 3000

2ª) Se a letra de valor menor estiver depois de outra de valor maior, somamos ambas.

Ex.: XI = 11      CX = 110      DL = 550

3ª) Se uma letra de valor menor estiver antes de outra de valor maior, subtraímos o valor da letra menor da maior.

Ex.: IV = 4      XL = 40      CM = 900

**Obs.:** Os símbolos V, L e D nunca são escritos à esquerda de outros de maior valor. Não se usa colocar o símbolo I à esquerda dos símbolos L, C, D e M, nem o símbolo X à esquerda dos símbolos D e M.

4ª) Se uma letra de valor menor estiver entre duas (letras) de valor maior, será subtraída da que lhe fica adiante, sem sofrer alteração a que lhe fica atrás.

Ex.: XIX = 19      DXL = 540      MCM = 1900

5ª) Cada risco horizontal sobre uma ou mais letras eleva o seu valor mil vezes.

Ex.:  $\overline{X}$  = 10.000       $\overline{CL}$  = 150.000       $\overline{M}$  = 1.000.000

### Exercícios:

1) Escreva em numerais romanos os números:

707	1959	12507
1822	1974	
1889	3428	

Quantas classes e ordens tem o número, que representado por numeral romano é  $\overline{XII}$  CCCLIV ?

O valor absoluto do algarismo das centenas do número MCDXCII quando escrito em numerais indo - arábicos é \_\_\_\_\_.

Escreva em numerais indo - arábicos os números romanos:

a)  $\overline{CDLIII}$  CXXI

b)  $\overline{VI}$

c) DCXXVII

### Respostas:

c) MDCCCLXXXIX

f) MMMCDXXVIII

1) a) DCCVII

D) MCMLIX

g)  $\overline{XII}$  DVII

b) MDCCCXXII

e) MCMLXXIV

2) 2 classes e 5 ordens

3) 4

4) a) 453.121      b) 6.000.000      c) 627

### 3. OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS

#### 1ª) ADIÇÃO

- Termos da adição → parcelas

- Resultado → soma ou total

$$5 + 7 = 12 \text{ soma ou total}$$

1ª parcela      2ª parcela

#### PROPRIEDADES:

##### Comutativa

- A ordem das parcelas não altera a soma

Ex.:  $2+9 = 9+2$

##### Associativa

- Podemos substituir duas ou mais parcelas pela sua soma efetuada.

Ex.:

$$2+5+8 = \underbrace{7+8}_{(2+5)} = 2 + \underbrace{13}_{(5+8)}$$

##### c) Dissociativa

- Podemos substituir uma parcela por duas ou mais parcelas, desde que a soma dessas parcelas seja igual a parcela primitiva.

$$\text{Ex.: } 10 + 3 = \underbrace{8+2}_{10} + 3 = 10 + \underbrace{1+2}_3$$

##### Elemento Neutro ZERO

Ex.:  $5+0 = 5$

#### 2ª) SUBTRAÇÃO

- É a operação inversa da adição.

- Termos da subtração → minuendo e subtraendo.

- Resultados → resto ou diferença.

$$12 - 5 = 7 \text{ resto ou diferença}$$

minuendo      subtraendo

Obs.:  $R + S = M$

$$M = \frac{M + S + R}{2}$$

M = minuendo

S = subtraendo



D - Dividendo

Q - Quociente

d - divisor

R - Resto

$$\text{Relação fundamental: } D = d \times Q + R$$

**Obs.:** 1)  $R = 0$  Divisão exata

2) Maior resto possível = divisor - 1

### Exercícios

Numa adição de três parcelas, se aumentarmos a 1ª de 5 unidades, a 2ª de 3 dezenas e a 3ª de 4 centenas, de quantas unidades ficará aumentada a soma?

Numa subtração, a soma do minuendo, subtraendo e resto é 834. Calcular o minuendo.

Em uma subtração, a soma do minuendo, subtraendo e resto é 520. Sendo o subtraendo 120, calcular o resto.

Em uma subtração, a soma do minuendo, subtraendo e resto é 540. O resto é a terça parte do minuendo. Calcular o subtraendo.

Que acontece ao resto de uma subtração quando:

adicionamos 15 unidades ao minuendo?

subtraímos 10 unidades do subtraendo?

subtraímos 20 unidades do minuendo?

adicionamos 8 unidades ao subtraendo?

Numa divisão, o quociente é 8. O divisor é o dobro do quociente e o resto é o maior possível. Calcular o dividendo.

Numa divisão, o divisor é 36, o quociente é a quarta parte do divisor e o resto é o maior possível. Calcular o dividendo.

Numa divisão, o quociente é 15 e o resto, 9. Qual o menor valor que pode ter o dividendo?

Numa subtração o subtraendo é 22 e o resto, 24. Qual é o minuendo?

A soma de dois números consecutivos é 841. Quais são os números?

A diferença entre dois números é 122 e o maior é 396. Qual é o menor?

Um senhor teve seu primeiro filho aos 21 anos. Quando este filho tinha 14 anos, nasceu seu irmão. Quantos anos tinha a senhora quando seu filho caçula fez 10 anos?

Um pai é 32 anos mais velho que sua filha e a soma das duas idades é 46 anos. Qual a idade dos dois?

Duas pessoas têm juntas R\$ 800,00. Uma tem R\$ 120,00 mais do que a outra. Quanto tem cada uma?

Trabalhei 6 dias numa obra, e recebi R\$ 108,00. Quanto vou receber se trabalhar 30 dias?

Numa divisão em que o divisor é o maior número de três algarismos, o resto é no máximo \_\_\_\_\_.

O divisor sendo 47, o quociente 26 e o dividendo 1263, o resto será \_\_\_\_\_.

Multiplica-se certo número por 7 e adiciona-se 4 ao produto. Divide-se depois esse resultado por 15, encontrando-se o quociente 11. Qual é o número?

Quantos algarismos devemos escrever para numerar um livro de 280 páginas?

**Respostas:**

1) 435

2) 417

3) 140

4) 180

5) a) aumenta 15      b) aumento 10      c) diminui 20

d) diminui 8

6) 143

7) 359

8) 159

46

10) 420 e 421

11) 274

12) 45

13) 39 e 7

14) 340 e 460

15) 540

16) 998

17) 41

18) 23

19) 732

## DIVISIBILIDADE

### 1- Múltiplos:

- Múltiplos de um número é o produto desse número por um número inteiro qualquer.

Ex.: a) Múltiplos de 4

$$4 \times 0 = 0$$

$$4 \times 1 = 4$$

$$4 \times 2 = 8$$

$$4 \times 3 = 12$$

$$M(4) = \boxed{\{0,4,8,12...\}}$$

b) Múltiplos de 7

$$7 \times 0 = 0$$

$$7 \times 1 = 7$$

$$7 \times 2 = 14$$

$$7 \times 3 = 21$$

$$M(7) = \boxed{\{0,7,14,21...\}}$$

Obs.: 1) O zero é múltiplo de todos os números.

Todo número é múltiplo dele mesmo.

### Exercícios

Enumere os três maiores múltiplos de 14, compreendidos entre 281 e 346.

Calcule o menor número que se deve adicionar a 342 para se obter um múltiplo de 17.

Respostas:

1) 308, 322 e 336

2) 15

### Divisores

- Um número é divisor de outro quando o divide exatamente.

Ex.: a) Divisores de 12

$$12 : 1 = 12$$

$$12 : 2 = 6$$

$$12 : 3 = 4$$

$$12 : 4 = 3$$

$$12 : 6 = 2$$

$$12 : 12 = 1$$

b) Divisores de 18

$$18 : 1 = 18$$

$$18 : 2 = 9$$

$$18 : 3 = 6$$

$$18 : 6 = 3$$

$$18 : 9 = 2$$

$$18 : 18 = 1$$

$$D(12) = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 12 \}$$

$$D(18) = \{ 1, 2, 3, 6, 9, 18 \}$$

### Obs.:

1) o número 1 (um) é divisor de todos os números.

b) Todo número é divisor dele mesmo.

### Condições de Divisibilidade

1º) Um número é divisível por 2, quando for par, isto é, terminar em 0, 2, 4, 6, 8.

Ex.: 10, 112, 1234, 23546, 237128, ...

2º) Um número é divisível por 3, quando a soma dos seus algarismos for um número múltiplo de 3, isto é, divisível por 3.

Ex.: a) 2352  $\rightarrow 2+3+5+2 = 12 = 4 \times 3$

b) 573102  $\rightarrow 5+7+3+1+0+2 = 18 = 6 \times 3$

3º) Um número é divisível por 4, quando os dois últimos algarismos da direita formam um número múltiplo de 4.

Ex.: a) 128  $\rightarrow 28 = 7 \times 4$

c) 1352  $\rightarrow 52 = 13 \times 4$

4º) Um número é divisível por 5, quando terminar em 0 ou 5.

Ex.: 3580, 27345, ...

5º) Um número é divisível por 6, quando for divisível por 2 e por 3.

Ex.: a) 2352

Terminam em 2, e a soma dos algarismos é divisível por 3, logo, são divisíveis por 6.

1) 573102

6º) Um número é divisível por 7, quando:

2) Se tiver até três algarismos:

1 x algarismo das unidades + 3 x algarismos das dezenas + 2 x algarismo das centenas for divisível por

7

Ex.: 371  $\rightarrow 1 \times 1 + 3 \times 7 + 2 \times 3 = 1 + 21 + 6 = 28 = 4 \times 7$

b) Se tiver mais de três algarismos, quando a diferença da soma das classes de ordem ímpar e par for um número divisível por 7.

Ex.: a)  $415422 \quad 422 - 415 = 7$

a)  $70.201.733.658 \quad (658 + 201) - (733 + 70) =$

$$4^a \quad 3^a \quad 2^a \quad 1^a \quad \quad \quad 859 \quad - \quad 803 \quad = \quad 56$$

7º) Um número é divisível por 8, quando os três últimos algarismos da direita formam um número múltiplo de 8.

Ex.:  $93888 \quad 888 = 111 \times 8$

8º) Um número é divisível por 9, quando a soma dos seus algarismos for um número múltiplo de 9.

Ex.: a)  $2457 \rightarrow 2+4+5+7 = 18 = 2 \times 9$

a)  $981621 \rightarrow 9+8+1+6+2+1 = 27 = 3 \times 9$

9º) Um número é divisível por 10, quando terminar em ZERO.

Ex.:  $210,74800, \dots$

10º) Um número é divisível por 11, quando a diferença entre a soma dos algarismos de ordem ímpar e a dos de ordem par, for um número múltiplo de 11.

Ex.: a)  $110 \quad S_1 = 0 + 1 = 1 \quad \underline{\quad} - 1$

$$S_p = 1$$

b)  $2497 \quad S_1 = 7 + 4 = 11 \quad \underline{\quad} - 11$

$$S_p = 9 + 2 = 11$$

c)  $372867 \quad S_1 = 7 + 8 + 7 = 22 \quad \underline{\quad} - 11 = 11$

$$S_p = 6 + 2 + 3 = 11$$

**Obs. :** Quando a soma dos algarismos de ordem ímpar é menor que a dos algarismos de ordem par, deve-se somar um múltiplo de 11 a primeira soma.

Ex.:  $518760 \rightarrow S_1 = 0 + 7 + 1 = 8 \quad 8 + 11 = 19$

$$S_p = 6 + 8 + 5 = 19$$

11º) Se um número é divisível por mais de um número primo, também o será pelo produto destes.

Ex.: 60 é divisível por 2,3 e 5 também o será por:

$$2 \times 3 \times 5 = 30$$

#### 4. Restos da divisão de um número por:

1º) 2 e 5, é o da divisão do algarismo das unidades por 2 ou por 5.

Ex.: a)  $3277 \rightarrow 7 : 2 \rightarrow$  resto 1

5)  $3277 \rightarrow 7 : 5 \rightarrow$  resto 2

a)  $1323 \rightarrow 3 : 2 \rightarrow$  resto 1

b)  $1323 \rightarrow 3 : 5 \rightarrow$  resto 3

2º) 3 e 9, é o da divisão da soma dos valores dos seus algarismos por 9.

Ex.: a)  $5297 \rightarrow 5+2+9+7=23 : 3 \rightarrow$  resto 2

$$23 : 9 \rightarrow \text{resto } 5$$

3º) 4, é o da divisão dos dois últimos algarismos da direita por 4.

Ex.:  $615 \quad 15 : 4 \quad \text{resto } 3$

4º) 10, é o algarismo das unidades.

Ex.: 1315 resto 5

5º) 11, é o da divisão da diferença entre a soma dos algarismos de ordem ímpar e a soma dos algarismos de ordem par, por 11.

Ex.:  $564719 \rightarrow S_i = 9+7+6 = 22$

$$S_p = 1+4+5 = 10$$

$$22 - 10 = 12$$

$12 : 11 \rightarrow$  resto 1

#### Exercícios

6) Qual dos números abaixo é divisível por 11?

a) 11111      b) 90900      c) 81719      d) 45720

a) Assinale o número abaixo que é divisível, ao mesmo tempo, por 3, 4 e 11.

b) 8016      b) 5246      c) 12570      d) 1980

3) O valor de A no número 385A para que seja divisível, ao mesmo tempo, por 2 e por 9, é .

7) 0      b) 4      c) 6      d) 2      e) 8

a) Para que o número 7A52B seja divisível, ao mesmo tempo, por 3 e por 10, os valores de A e B são , respectivamente:

a) 0 e 1 b) 2 e 4      c) 4 e 2 d) 1 e 5      e) 1 e 0

8) A diferença entre o maior número e o menor número que podemos formar com os algarismos 3, 4, 5 e 6, que sejam divisíveis por 11, vale:

9) 2913      b) 3069      c) 4103      d) 9009

1) Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

- 1) Todo número divisível por 3, também é divisível por 9.
- 2) Para que um número seja divisível por 5, deve, obrigatoriamente, terminar por 0.
- 3) Um número divisível por 3 e por 5, é também divisível por 15.
- 1) O zero é divisor de qualquer número.
- 1) Qual das afirmações abaixo é falsa?
- 1) Um número que termine por 0, é divisível por 4.
- 2) Um múltiplo de 2 e de 3, é divisível por 6.
- 3) Se um número é múltiplo de 15, também é múltiplo de 3.
- 4) O zero é múltiplo de qualquer número.
- 1) Qual o resto da divisão do número 787 por 5?
- 1) Intercale um algarismo entre os algarismos do número 56, de modo a obter um numeral de três algarismos que represente o menor número divisível por 4 e por 9.
- 2) Qual o algarismo que deve substituir a letra "A" no numeral 34A2 para se obter um número divisível por 4 e por 9.
- 3) Qual o menor valor de  $\underline{X}$  para que o número 245 $\underline{X}$ 880, seja divisível por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10?
- 4) Para que o número 7A08, dividido por 11, deixe resto 3, é necessário substituir a letra A por \_\_\_\_\_.

**Respostas:**

2	c	6	b	10	7
3	d	7	c	11	9
4	d	8	a	12	0
5	e	9	2	13	2

**5. NÚMEROS PRIMOS**

1ª Definição

\_ É aquele que só é divisível por ele mesmo e pela unidade.

2ª Definição

\_ É aquele que só possui dois divisores.

Obs.: Pela 1ª definição, o n.º 1 é primo, mas, pela 2ª definição, o n.º 1 não é primo. Ficaremos com a 2ª definição.

Exemplos de números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

**Regra prática para reconhecimento dos números primos**

Dividimos, o número dado pelos números primos em ordem crescente (2, 3, 5,...) até encontrarmos um quociente igual ou menor que o divisor. Se a divisão não for exata (Resto  $\neq 0$ ), o número é primo.

Obs.: Não é necessário efetuar as divisões por 2, 3, 5, 7 e 11, pois sabemos as "condições de divisibilidade".

Ex.: Seja o número 523

523  $\overline{)13}$       523  $\overline{)17}$       523  $\overline{)19}$

003 40      013 30      143 27

$$523 \overline{) 23}$$

063  $\overline{) 22} \longrightarrow$  Como quociente é menor que o divisor e a divisão não é exata, 523 é 17 primo.

### Exercícios

- 1) Verificar se o n.º 437 é primo.
- 2) Verificar se o n.º 691 é primo.

### Números primos entre si

São aqueles que admitem como único divisor comum a unidade.

Ex.:

a) 5 e 13

b) 3 e 14

c) 15 e 8

D (5) = {1,5}

D (3) = {1,3}

D (15) = {1, 3, 5, 15}

D (13) = {1, 13}

D (14) = {1, 2, 7, 14}

D (8) = {1, 2, 4, 8}

### DECOMPOSIÇÃO DE UM NÚMERO EM UM PRODUTO DE FATORES PRIMOS

Dividimos o número dado por números primos, na ordem crescente, até encontrarmos quociente 1.

Ex.:

Decompor o n.º 180 em um produto e fatores primos.

$$\begin{array}{r|l}
 180 & 2 \\
 90 & 2 \\
 45 & 3 \\
 15 & 3 \\
 5 & 5 \\
 1 & 
 \end{array}$$

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

### Exercício

\_ Decompor em um produto de fatores primos, os números abaixo:

a) 600

b) 484

c) 1058

Respostas:

1) Não é primo

2) É primo

a)  $2^3 \times 3 \times 5^2$

b)  $2^2 \times (11)^2$

c)  $2 \times (23)^2$

### Divisibilidade de números mediante seus fatores primos

Decompondo-se dois números em seus fatores primos, o primeiro é divisível pelo segundo, se contiver pelo menos, os fatores primos do segundo com expoentes iguais ou maiores.

Ex.:

a) 500 é múltiplo de 20, pois  $500 = 2^2 \times 5^3$  e  $20 = 2^2 \times 5$

10) 360 não é múltiplo de 32, pois  $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$  e  $32 = 2^5$

11) 48 é divisor de 3600, pois  $48 = 2^4 \times 3$  e  $3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$

12) 56 não é divisor de 720, pois  $56 = 2^3 \times 7$  e  $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$

### Exercícios

1) Determinar qual é o menor número pelo qual se deve multiplicar 1512 para se obter um múltiplo de 360?

2) Determinar o menor número pelo qual devo dividir 300 para que se torne divisor de 1000?

3) Determinar o menor número pelo qual devo multiplicar 48 para que se torne múltiplo de 300?

**Respostas:**

1) 5                    2) 3                    3) 25

### 6. Números de divisores de um número

1º) Decompomos o n.º em um produto de fatores primos.

2º) Somamos 1 a cada expoente dos fatores primos e multiplicamos os resultados.

Ex.:

1) Quantos são os divisores do nº 120?

120		2	
60		2	$120 = 2^3 \times 3 \times 5$
30		2	$(3+1) \times (1+1) \times (1+1) = 4 \times 2 \times 2 =$ <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6 divisores</span>
15		3	
5		5	
1			

2) Quantos são os divisores do n.º  $2^2 \times 3 \times 5^3 \times 7$ ?

$$(2+1) \times (1+1) \times (3+1) \times (1+1) = 3 \times 2 \times 4 \times 2 = 48 \text{ divisores}$$

3) O número  $2^x \times 5^3$  admite 12 divisores. Calcular o valor de x.

$$(X + 1) \times (3 + 1) = 12 \qquad X + 1 = 3$$

$$(X + 1) \times 4 = 12 \qquad X = 3 - 1$$

$$X + 1 = \frac{12}{4} \qquad X = 2$$

4) O número  $N = 3^x \times 5^2$  admite 9 divisores. Calcular N.

$$(X + 1) \times (2+1) = 9 \qquad X + 1 = 3$$

$$(X + 1) \times 3 = 9 \qquad X = 3 - 1$$

$$X + 1 = \frac{9}{3} \qquad X = 2$$

Substituindo

$$N = 3^x \times 5^2 = 3^2 \times 5^2 = 9 \times 25 = 225$$

### Exercícios

1) Quantos são os divisores do número 360?

2) Quantos são os divisores do número  $2^2 \times 3^4 \times 5^3 \times 7$ ?

3) O número  $2^4 \times 3^2 \times 5^x$  admite 30 divisores. O valor de x é \_\_\_\_\_.

4) O número  $N = 2^3 \times 3^x \times 5$  admite 24 divisores. O valor de N é \_\_\_\_\_.

**Respostas:**

1) 24

2) 120

3) 1

4) 360

### Determinação dos Divisores de um número

1º Decompomos o número dado em um produto de fatores primos.

2º Colocamos um traço à direita dos fatores primos e acima e à direita do traço escrevemos o número **1**.

3º Multiplicamos os números primos pelos números que estão à direita do traço acima deles.

Ex.:

1) Quais são os divisores do número 120?

	1	
120	2	2
60	2	4
30	2	8
15	3	3, 6, 12, 24
5	5	5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120
1		

Resposta.: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120

2) Quais são os divisores do número  $2 \times 3^2 \times 5$ ?

	1	
1)	2	
2)	3, 6	Resp.: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90.
3	9, 18	
5	5, 10, 15, 30, 45, 90	

### Exercícios

54 Quais são os divisores do número 180?

55 Quais são os divisores do número  $2^2 \times 3 \times 5^2$ ?

### 7. Máximo Divisor Comum (M.D.C.)

**MDC** de dois ou mais números é o maior número que os divide exatamente. Vejamos como podemos calculá-lo:

1º **processo**: Decomposição em fatores primos.

\_ É o produto dos fatores primos comuns elevados aos menores expoentes.

Ex.:

1) Achar o MDC entre 90, 120 e 150.

90	2	120	2	150	2
45	3	60	2	75	3
15	3	30	2	25	5
5	5	15	3	5	5
1		5	5	1	

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5$$

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

$$\text{MDC} = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

2) Achar o MDC entre os números  $2^3 \times 3^2 \times 5^3$ ;  $2^5 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$  e  $2^4 \times 3^3 \times 5 \times 11$ .

$$\text{m.d.c.} = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 8 \times 9 \times 5 = 360$$

**2º processo:** Divisões sucessivas.

\_ Dividimos o número maior pelo menor. Depois o número menor pelo resto achado e assim, sucessivamente, até encontrarmos resto ZERO. O último divisor será o M.D.C.

Ex.:

1) Achar o mdc entre 108 e 60.

Quociente

	1	1	4	MDC = 12
108	60	48	12	
48	12	0		

Resto

Obs.: No caso de vários números, achamos o MDC dos dois menores. Depois achamos o MDC desse resultado com o terceiro número e assim, sucessivamente.

2) Achar o m.d.c. entre 90, 120 e 150.

	1	3	O m.d.c. dos dois menores é 30.
120	90	30	
30	0		

	5	Resp.: 30
150	30	
0		

Obs.: \_ Quando um número é múltiplo de outro, o M.D.C. é o menor deles.

\_ O M.D.C. de números primos entre si é a unidade.

### Exercícios

- 1) Achar o MDC entre 20, 36 e 88.
- 2) Sendo  $A = 2^4 \times 3 \times 5^3$ ;  $B = 2^5 \times 3^2 \times 7$  e  $C = 2^2 \times 3^4 \times 5^2$ , o mdc entre A, B e C, vale \_\_\_\_\_.
- 3) Quantos são os divisores comuns dos números 48 e 60?



- |    |        |    |                   |
|----|--------|----|-------------------|
| 1) | 900    | 4) | 1200, 2400 e 3600 |
| 2) | 138600 | 5) | R\$ 364,00        |
| 3) | 185    |    |                   |

### Propriedade entre MDC e o MMC de dois ou mais números

\_ O produto de dois ou mais números é igual ao produto do mmc pelo mdc, destes números.

Ex.:

21 Os números 90 e 60  $180 \times 30 = 90 \times 60$

MMC (90, 60) = 180  $5400 = 5400$  OK!

MDC (90, 60) = 30

22 Sabendo-se que o MMC e MDC de dois números são respectivamente 18 e 3 e que, o menor deles vale 6, qual o valor do maior?

$18 \times 3 = 6 \times \text{maior}$  Resp.: 9

a)  $= 6 \times 9$

### Exercícios Complementares

- O mdc de dois números é 15 e o menor é a quarta parte do maior, que vale \_\_\_\_\_.
  - Para acondicionar 1560 latas de azeite e 870 latas de óleo em caixotes, de modo que cada caixote contenha o mesmo número de latas sem que sobre nenhuma e sem misturar as latas de cada espécie, serão necessárias quantas latas em cada caixote?
  - O menor número que dividido por 18, 32 e 54, deixa sempre resto 11, é \_\_\_\_\_.
  - O cabo Praxedes tira serviço a cada 5 dias, e o soldado Atanagildo, a cada 7 dias. Os dois estão de serviço hoje: logo tirarão serviço juntos novamente daqui a \_\_\_\_ dias.
  - Quais dos elementos do conjunto dos divisores de 180 são múltiplos de 6 e menores que 20?
  - Qual o menor número pelo qual se deve multiplicar 210 a fim de obter um número divisível por 126?
  - Três e cinco são os fatores primos de dois números que admitem, cada um, oito divisores. Determine os números.
  - O produto de dois números é 864. Calcule os números sabendo que o mmc deles é 72.
- 9) Qual é o mmc de dois números cujo produto é 1512 e o mdc deles é 6.

### Respostas:

- |         |                |               |
|---------|----------------|---------------|
| 21. 60  | 24. 35         | 27. 135 e 375 |
| 22. 30  | 25. 6, 12 e 18 | 28. 24 e 36   |
| 23. 875 | 26. 3          | 29. 252       |

### 9. Base de um sistema de numeração

Base de um sistema de numeração é o número de algarismos utilizados para escrever os números. Normalmente utilizamos a **base 10**, isto é, com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0. Entretanto poderíamos usar outras bases menores, como a base 5, com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 0, ou mesmo a **base 2**, com 1 e 0.

### Transformação de um número escrito na base 10 par outra base

Divide-se este número pela base que se quer passar, em seguida o quociente desta divisão pela base novamente, e assim sucessivamente, até que o quociente seja menor que a base.

Ex.: a) Passar o número 87 da base decimal para a base 5.

$$\begin{array}{r} 87 \overline{)5} \quad 17 \overline{)5} \\ 37 \quad 17 \quad 2 \quad 3 \quad \text{o número será } 322_{(5)} \\ \underline{2} \end{array}$$

b) Passar o número 13 da base decimal para a base 2.

$$\begin{array}{r} 13 \overline{)2} \quad 6 \overline{)2} \quad 3 \overline{)2} \\ 1 \quad 6 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \quad \text{o número será } 1101_{(2)} \\ \underline{\hspace{1.5cm}} \end{array}$$

### Exercícios:

- 1) Transformar o número 39 da base 10 para base 5.
- 2) Transformar o número 83 da base 10 para a base 8.
- 3) Transformar o número 91 de base 10 para a base 4.

### Transformação de um número de uma base qualquer para a base 10

Para transformar um número na base 10 utilizamos o seguinte polinômio:

$$(y)_{10} = \dots a_1B^3 + a_2B^2 + a_3B^1 + a_4B^0$$

Ex.:

a) O número  $213_{(8)}$  passa para  $(y)_{10}$ . Vamos usar o polinômio considerando  $B^0$  até  $B^2$ , pois são três algarismos.

$$(y)_{10} = a_1B^2 + a_2B^1 + a_3B^0 \quad \text{--- } a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 3 \text{ e } B = 8 \text{ (base)}$$

$$(Y)_{10} = 2 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 \quad \text{--- } (y)_{10} = 128 + 8 + 3 \quad \text{--- } (y) = 139$$

$$\text{Logo: } 139_{(10)} = 213_{(8)}$$

b) O número  $210_{(7)}$  passa para  $(y)_{10}$

$$\text{Logo } 210 \text{ três algarismos } a_1B^2 + a_2B^1 + a_3B^0$$

$$(Y)_{10} = 2 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 0 \cdot 7^0 \quad \text{--- } (y)_{10} = 98 + 7 + 0 = 105$$

$$\text{Logo: } 210_{(7)} = 105_{(10)}$$

c) O número  $210_{(7)}$  passa para  $(x)_5$ .

Primeiro passamos para a base 10 conforme acima.

Então  $(y)_{10} = 105$  agora pelas divisões sucessivas:

$$\begin{array}{r} 105 \overline{)5} \quad 21 \overline{)5} \\ 05 \quad 21 \quad 1 \quad 4 \end{array}$$

$$\text{Logo: } 410_{(5)} = 105_{(10)} \text{ como também } 210_{(7)} = 410_{(5)}$$

d) O número  $213_{(8)}$  passa para a base 2.

Mas  $(y)_{10} = 139$  conforme exemplo anterior.

Agora pelas divisões sucessivas:

$$\begin{array}{r} 139 \overline{)2} \quad 69 \overline{)2} \quad 34 \overline{)2} \quad 17 \overline{)2} \quad 8 \overline{)2} \quad 4 \overline{)2} \quad 2 \overline{)2} \quad \overline{)2} \\ 1 \quad 69 \quad 1 \quad 34 \quad 0 \quad 17 \quad 1 \quad 8 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

Logo  $10001011_{(2)} = 213_{(8)}$

e) o número  $10001011_{(2)}$  passa para a base 10.

Veja o seguinte quadro:

2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1

Observe que o número 10001011 está colocado da direita para a esquerda. Retire os valores que estão acima do algarismo **1**, ignorando aqueles acima do **0**. Some-os:  $1 + 2 + 8 + 128 = 139$

Logo:  $10001011_{(2)} = 139_{(10)}$

Obs.: Para qualquer número do **sistema binário** (base 2), usa-se o quadro acima para passar para **base 10** (decimal).

### Exercícios

- Passar o número  $242_{(7)}$  para a base 10 (decimal).
- Passar o número  $1011_{(3)}$  para a base 10.
- Passar o número  $11101_{(2)}$  para a base 10.
- Passar o número  $156_{(7)}$  para a base 8.
- Passar o número  $11001_{(2)}$  para a base 3.
- Passar o número  $203_{(5)}$  para a base 2.

### Respostas:

- 1)  $124_{(5)}$                       2)  $123_{(8)}$  3)  $1123_{(4)}$   
1) 128 2) 31                      3) 29                      4)  $132_{(8)}$                       5)  $221_{(3)}$   
6)  $110101_{(2)}$

### 10 Problemas de sucessão de números naturais

**Modelo:** Quem escreve de 12 até 28, quantos algarismos escreve?

Números escritos: 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27 e 28.

Total: 17 números de dois algarismos,  $17 \times 2 = 34$  algarismo.

Técnica:  $(28 - 12) + 1 = 17$  números

Se ao todo são 17 números, cada um com dois algarismos, teremos,  $17 \times 2 = 34$  algarismos.

**Modelo:** Para escrever todos os números de 1 a 327, quantos algarismos serão necessários?

\_ Números de **um** algarismo  $\rightarrow$  de 1 a 9  $\rightarrow (9 - 1) + 1 = 9$  números  $9 \times 1 =$  **9 algarismos**

\_ Números de **dois** algarismos  $\rightarrow$  de 10 a 99  $\rightarrow (99 - 10) + 1 = 90$  números  $90 \times 2 =$  **180 algarismos**

\_ Números de **três** algarismos  $\rightarrow$  de 100 a 327  $\rightarrow (327 - 100) + 1 = 228$  números  $228 \times 3 =$  **684 algarismos**

\_ **Total** de algarismos:  $9 + 180 + 684 =$  **873 algarismos**

**Modelo:** Para numerar as páginas de um livro foram necessários 258 tipos. Quantas páginas tem o livro?

\_ 1 até 9  $\rightarrow$  **9 números**  $\rightarrow$  9 algarismos

Algarismos restantes:  $258 - 9 = 249$

\_ 10 até 99  $\rightarrow$  **90 números**  $90 \times 2 = 180$  algarismos

Algarismos restantes:  $249 - 180 = 69$

$69 + 3 = 23$  números de três algarismos

\_ Total de páginas:  $9 + 90 + 23 = 122$  páginas

**Modelo:** Quantos números pares são escritos de 11 até 21?

\_ Números escritos: 11, **12**, 13, **14**, 15, **16**, 17, **18**, 19, **20**, 21,

\_ Total: 5 números

\_ Técnica:  $\frac{21-11}{2} = \frac{10}{2} = 5$  números

Obs.: Válida para seqüência que comece e termine em n.º ímpar.

**Modelo:** Quantos números pares são escritos de 12 até 20?

\_ Números escritos: **12**, 13, **14**, 15, **16**, 17, **18**, 19, **20**

\_ Total: 5 números

\_ Técnica:  $\frac{20-12}{2} + 1 = \frac{8}{2} + 1 = 4 + 1 = 5$  números

Obs.: Válida para seqüência que comece e termine em n.º par.

**Modelo:** Quantos números pares são escritos de 11 até 20?

\_ Números escritos: 11, **12**, 13, **14**, 15, **16**, 17, **18**, 19, **20**

\_ Total: 5 números

\_ Técnica:  $\frac{20-11+1}{2} = 5$  números

Obs.: Válida para seqüência que comece em ímpar e termine em par ou vice-versa, comece em par e termine em ímpar.

**Modelo:** Quantos algarismos serão necessários para escrevermos os números pares de 23 a 1100?

\_ Números de **dois** algarismos  $\rightarrow$  23 a 99  $\rightarrow \frac{99-23}{2} = \frac{76}{2} = 38$  números  $38 \times 2 = 76$  algarismos

\_ Números de **três** algarismos 0 a 999  $\rightarrow \frac{999-100+1}{2} = \frac{900}{2} = 450$  números  $450 \times 3 = 1350$  algarismos  $\rightarrow$

\_ Números de **quatro** algarismos 1000 a 1100  $\rightarrow \frac{1100-1000}{2} + 1 = \frac{100}{2} + 1 = 50 + 1 = 51 \times 4 = 204$  algarismos

\_ Total =  $76 + 1350 + 204 = 1630$

**Exercícios:**

- 3) Com 618 algarismos posso numerar um livro com quantas páginas?
- 4) Quantos algarismos serão necessários para escrevermos os números ímpares de 35 a 605?
- 5) Quantos algarismos serão necessários para escrevermos os números ímpares compreendidos entre 7 e 1109?

**Respostas:**

- 1) 242 2) 825 3) 1657

## 11. Frações

\_ Fração representa uma ou mais partes da unidade dividida em partes iguais.

Representa-se uma fração por  $\frac{N}{D}$

N – Numerador (partes que foram tomadas)

D – Denominador (partes em que a unidade foi dividida)

Obs.: Numa fração o numerador é quociente e o denominador divisor.

### 1) Classificação das frações

a) **Decimal** – quando o denominador for 10 ou potência de 10.

Ex.:  $\frac{3}{10}, \frac{7}{100}, \frac{11}{1000}, \dots$

b) **Ordinária** – quando não for decimal.

Ex.:  $\frac{3}{5}, \frac{2}{7}, \frac{3}{200}, \dots$

c) **Própria** – quando o numerador for menor que o denominador.

Ex.:  $\frac{3}{4}, \frac{7}{10}, \frac{2}{9}, \dots$

d) **Imprópria** – quando o numerador for maior que o denominador.

Ex.:  $\frac{8}{3}, \frac{7}{4}, \frac{17}{10}, \frac{30}{17}, \dots$

**Obs.:** Alguns autores também consideram imprópria aquelas frações que tem o numerador igual ao denominador.

Ex.:  $\frac{8}{8}, \frac{10}{10}, \dots$

Nota: todo número inteiro é uma fração de denominador unitário.

Ex.:  $\frac{7}{1}, \frac{12}{1}, \frac{97}{1}, \dots$

### 2) Número misto ou fração mista

\_ É formado por uma parte inteira e uma parte fracionária.

Ex.:  $3\frac{1}{2}, 4\frac{2}{3}, 7\frac{6}{11}, \dots$

### 3) Transformação de fração imprópria em número misto

\_ Divide o numerador pelo denominador.

Ex.:

a)  $\frac{17}{3}$

$17 \overline{) 3}$  denominador resp.:  $5\frac{2}{3}$

$$2 \left| \begin{array}{l} 5 \text{ parte inteira} \\ \hline \text{numerador} \end{array} \right.$$

b)  $\frac{21}{5}$

a) 5       $\left| \text{Resp.: } 4\frac{1}{5} \right.$

1 4

#### 4. Transformação de número misto em fração imprópria

\_ Numerador - Parte inteira x Denominador + Numerador

\_ Denominador - Repete

Ex.:

a)  $4\frac{2}{3} = \frac{4 \times 3 + 2}{3} = \frac{14}{3}$

b)  $4\frac{7}{10} = \frac{4 \times 10 + 7}{10} = \frac{47}{10}$

#### 5. Propriedade fundamental das frações

\_ Uma fração não se altera, quando multiplicarmos ou dividirmos o numerador e o denominador por um mesmo número. As frações resultantes serão **equivalentes** ou **idênticas** a primeira.

Ex.:  $\frac{36 \div 2}{48 \div 2} = \frac{18 \div 3}{24 \div 3} = \frac{6 \times 4}{8 \times 4} = \frac{24}{32}$

\_ Baseados na propriedade anterior, sempre que possível, devemos simplificar as frações.

Ex.:

b)  $\frac{28 \div 2}{36 \div 2} = \frac{14 \div 2}{18 \div 2} = \frac{7}{9}$

c)  $\frac{147 \div 3}{1029 \div 3} = \frac{49 \div 7}{343 \div 7} = \frac{7 \div 7}{49 \div 7} = \frac{1}{7}$

Obs.: Quando uma fração não pode mais ser simplificada, ela tornou-se irredutível. Ex.: 7/9 e 1/7 dos exemplos anteriores.

#### Exercícios

Simplificar as frações:

d)  $\frac{54}{81}$

f)  $\frac{529}{69}$

e)  $\frac{39}{169}$

g)  $\frac{1210}{3300}$

#### Respostas:

a) 2/3

b) 3/13

c) 23/3

d) 11/30

## 6. Redução de frações ao mesmo denominador

1º Aachamos o MMC dos denominadores que passará a ser o novo denominador.

2º Dividimos o novo denominador pelo antigos e o resultado multiplicamos pelos respectivos denominadores.

Ex.: Reduzir ao mesmo denominador as frações:

$$\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{12} \quad \text{MMC (4, 6, 12) = 12 Novo denominador}$$

$$\frac{9}{12}, \frac{8}{12}, \frac{2}{12}, \frac{5}{12}$$

### Exercícios

Reduzir ao mesmo denominador as frações:

a)  $\frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{4}{9}, \frac{7}{12}$

b)  $\frac{5}{8}, \frac{7}{18}, \frac{11}{30}, \frac{13}{36}$

### Respostas:

a)  $\frac{60}{72}, \frac{27}{72}, \frac{32}{72}, \frac{42}{72}$

b)  $\frac{225}{360}, \frac{140}{360}, \frac{132}{360}, \frac{130}{360}$

## 7. Comparação de frações

Primeiro reduzimos elas ao mesmo denominador. Será maior aquela que tiver o maior numerador.

Ex.:

c)  $\frac{7}{5} > \frac{3}{5}$

d)  $\frac{3}{7} < \frac{8}{7}$

e)  $\frac{2}{3} e \frac{3}{4} \rightarrow \frac{8}{12} < \frac{9}{12}$

### Obs.:

> significa maior

< significa menor

### Exercícios

d) Colocar em ordem crescente as frações  $\frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{10}, \frac{5}{6}$

e) Colocar em ordem decrescente as frações:  $\frac{2}{5}, \frac{5}{6}, \frac{8}{3}, \frac{9}{10}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}$

### Resp.:

e)  $\frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$

f)  $\frac{8}{3}, \frac{9}{10}, \frac{7}{8}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}$

## 8 - Operações com frações

### 1ª Adição e Subtração

6) **Denominadores iguais** - conservamos o denominador e somamos ou subtraímos os numeradores.

Ex.:

$$a) \frac{2}{3} + \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2+5+4}{3} = \frac{11}{3}$$

$$b) \frac{8}{5} - \frac{1}{5} - \frac{3}{5} = \frac{8-1-3}{5} = \frac{4}{5}$$

b) **Denominadores diferentes** - reduzimos ao mesmo denominador e procedemos como anteriormente.

Ex.:

$$7) \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{5}{6} = \frac{30+45+24+50}{60} = \frac{149}{60}$$

$$8) \frac{3}{8} - \frac{2}{5} - \frac{7}{10} + \frac{3}{4} = \frac{15-16-28+30}{40} = \frac{1}{40}$$

### 2ª Multiplicação

\_ Multiplicamos, respectivamente, os numeradores e denominadores das frações.

Ex.:

$$9) \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$$

$$10) \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times 4 \times \frac{1}{5} = \frac{5 \times 3 \times 4 \times 1}{6 \times 4 \times 1 \times 5} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

Obs.: Devemos simplificar as frações antes de multiplicarmos.

Ex.:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{10} & \cancel{14} \\ \cancel{9} & \cancel{5} & \cancel{7} & \cancel{3} \end{array} \times \frac{1}{7} = 2$$

$$\cancel{2} \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

$$1$$

### 3ª Divisão

2) Inverso de uma fração é trocar o numerador e denominador de posição.

Ex.:

$$1) \frac{3}{4} \text{ INVERSO } \frac{4}{3}$$

$$3) \frac{1}{6} \text{ INVERSO } 6$$

$$2) \frac{7}{5} \text{ INVERSO } \frac{5}{7}$$

$$4) 7 \text{ INVERSO } \frac{1}{7}$$

b) Para dividirmos duas frações, conservamos a primeira e multiplicamos pelo inverso da segunda.

Ex.:

$$736 \quad \frac{2}{3} : \frac{9}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{27}$$

$$737 \quad \frac{7}{3} : 3 = \frac{7}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$$

$$738 \quad \frac{5}{3} : \frac{1}{6} = \frac{5}{3} \times \frac{6}{1} = 10$$

### 9) Expressões com frações

1º) Realizamos as operações de multiplicação e divisão, na ordem que forem aparecendo.

2º) Realizamos as operações de adição e subtração.

3º) Se houver sinais auxiliares (parênteses, colchetes e chaves) eliminamos na ordem, parênteses, colchetes e chaves, obedecendo o prescrito anteriormente.

Ex.:

$$236 \quad \frac{2}{45} \times \frac{18}{5} : \frac{12}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{1}{15} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{1+5-6}{15} = \frac{0}{15} = 0$$

237

$$\frac{5}{6} + \frac{5}{6} : \frac{37}{7 + 2\frac{1}{3} \times \frac{6}{35}} = \frac{5}{6} + \frac{5}{6} : \frac{37}{7 + \frac{7}{3} \times \frac{6}{35}} = \frac{5}{6} + \frac{5}{6} : \frac{37}{7 + \frac{2}{5}} = \frac{5}{6} + \frac{5}{6} : \frac{37}{\frac{35+2}{5}} =$$

$$\frac{5}{6} + \frac{5}{6} : \frac{37}{5} = \frac{5}{6} + \frac{5}{6} : 37 \times \frac{5}{37} = \frac{5}{6} + \frac{5}{6} : 5 = \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5+1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Exercícios

Resolver as expressões:

$$50 \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} =$$

$$51 \quad \frac{7}{12} - \frac{4}{9} \times \frac{21}{16} =$$

$$52 \quad \frac{2}{5} + \frac{3}{5} : 1\frac{1}{5} =$$

$$53 \quad \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}{4 - \frac{5}{6}} =$$

$$54 \quad \frac{3 - \frac{2}{5}}{\frac{7}{10} - \frac{1}{4}} =$$

$$55 \quad \frac{\frac{1}{5} + \frac{3}{10} \times 20 - 1}{4 - \frac{11}{20}} =$$

$$56 \quad \frac{2\frac{1}{3} + \frac{5}{6} \times 8 - 2}{3\frac{2}{3} + 2\frac{1}{2}} =$$

$$57 \quad \frac{3\frac{1}{2} - 2}{5\frac{1}{3} - 3} + \frac{2}{3} \times \frac{9}{4} =$$

$$58 \quad \frac{2}{3} + \frac{4\frac{2}{3} - 2}{4 - 3\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} =$$

$$59 \quad \frac{3 - 2\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{5 - 3\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{3}{4}} =$$

$$61 \quad 4 - \frac{5}{7} + \frac{1}{4 - \frac{1}{2}} =$$

$$60 \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{4 - 2\frac{1}{3}}{6\frac{1}{4} - 4} =$$

**Respostas:**

a)  $\frac{17}{18}$

f)  $\frac{104}{69}$

k)  $\frac{49}{54}$

b) 0

g)  $\frac{42}{37}$

12)  $\frac{25}{7}$

c)  $\frac{9}{10}$

h)  $\frac{15}{7}$

d)  $\frac{5}{19}$

i)  $\frac{23}{4}$

e)  $\frac{52}{9}$

j)  $\frac{20}{9}$

**Exercícios resolvidos sobre frações:**

a) Uma fração equivalente a  $\frac{12}{36}$ , cuja a soma dos termos é 40.

Toda vez que o problema pede fração equivalente, devemos primeiro torná-la irredutível, pois facilita o raciocínio. Então dividindo numerador e denominador por 4, ficamos com

$$\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Observe que se agora multiplicarmos por 10, a soma dos termos será 40, isto é

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 10}{3 \times 10} = \frac{10}{30} \text{ ou seja, soma dos termos: } 10 + 30 = 40 \text{ OK!}$$

b) A fração equivalente a  $\frac{12}{20}$ , que tenha denominador 50.

$$\frac{12}{20} = \frac{3}{5} = \frac{3 \times 10}{5 \times 10} = \frac{30}{50} \text{ como o anterior, simples aplicação da propriedade fundamental das frações.}$$

c) O valor de  $\frac{3}{4}$  de R\$ 80,00.

Pelo conceito de fração - denominador 4, R\$ 80,00 deve ser dividido em 4 partes iguais, ou seja - R\$ 80,00 : 4 = R\$ 20,00.

Numerador 3, quer dizer que devemos pegar e partes, isto é 3 x R\$ 20,00 = R\$ 60,00 - que é a fração procurada.

Macete: Multiplicar a fração pela quantidade:

No caso  $\frac{3}{4}$  de R\$ 80,00  $\frac{3}{4} \times R\$ \frac{20,00}{80,00} \neq R\$ 60,00$

a) Calcular  $\frac{4}{3}$  de  $\frac{1}{2} \times 120$

b)  $\frac{4}{3}$  de  $\frac{1}{2} \times 120 = 80$

1)  $1\frac{1}{3}$  de um presente de natal custa R\$ 120,00. Qual o preço do presente?

Transformando o número misto em fração imprópria, temos  $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

Ao tomar 4 das 3 partes do preço do presente, temos R\$ 120,00.

Então, apenas uma dessas partes será; R\$ 120,00 : 4 = R\$ 30,00.

E preço:  $3 \times R\$ 30,00 = \boxed{R\$ 90,00} \rightarrow \frac{3}{4}$  do presente.

4. Calcular  $\frac{2}{5}$  de um número, sabendo que  $\frac{5}{3}$  desse número é 250?

$\frac{5}{3} = 250$  logo  $250 : 5 = 50$  e  $50 \times 3 = 150$  é o número.

Então  $\frac{2}{5}$  de 150 é  $\frac{2}{5} \times 150 = 60$

2. Calculando  $\frac{3}{4}$  de 4h 30 min 20s, obtemos?

$$\frac{3}{4} \times 4h = 3h; \quad \frac{3}{4} \times 30min = 22,5min = 22min 30s; \quad \frac{3}{4} \times 20s = 15s$$

E ficamos com 3h 22min 45s

Gastei R\$ 640,00 e fiquei com  $\frac{3}{7}$  da minha mesada. Minha mesada é de?

A Minha mesada é  $\frac{7}{7}$ , se gastei R\$ 640,00 e fiquei com  $\frac{3}{7}$  é porque

$$R\$ 640,00 = \frac{7}{7} - \frac{3}{7} = \frac{4}{7} \text{ então } R\$ 640,00 : 4 = R\$ 160,00 = \frac{1}{7}$$

e R\$ 160,00  $\times 7 = R\$ 1.120,00$  é os  $\frac{7}{7}$  (mesada inteira)

Uma pessoa tinha determinada importância e gastou, a princípio,  $\frac{1}{3}$  depois  $\frac{1}{4}$  e ficou, ainda, com R\$ 150,00. Quanto possuía?

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 150,00 = \frac{1}{1} \rightarrow \text{que é a importância que possuía}$$

$$\frac{3+4}{12} + R\$150,00 = \frac{12}{12} \rightarrow \text{que é a importância que possuía}$$

$$\frac{7}{12} + R\$150,00 = \frac{12}{12} \rightarrow R\$ 150,00 = \frac{12}{12} - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\text{Se } \frac{5}{12} = R\$150,00 \text{ então } R\$ 150,00 : 5 = R\$ 30,00 = \frac{1}{12}$$

$$\text{Logicamente que } \frac{12}{12} = R\$30,00 \times 12 = R\$360,00 \rightarrow \text{importância que possuía}$$

Uma pessoa possuía certa importância e gastou, a princípio, a metade; depois, 1/3 do resto, depois, 1/5 do segundo resto, ficando ainda com R\$ 160,00. Quanto possuía?

$$1^\circ \text{ Resto} \rightarrow \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$2^\circ \text{ Gasto} \rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \rightarrow \text{lógico que o segundo resto é } \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

$$3^\circ \text{ Gasto} \rightarrow \frac{1}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{2}{30} \rightarrow \text{lógico que o terceiro resto será } \frac{2}{6} - \frac{2}{30}$$

$$3^\circ \text{ Resto} \rightarrow \frac{8}{30} = R\$160,00 \rightarrow \text{então } R\$ 160,00 : 8 = R\$ 20,00 \text{ isto é } R\$ 20 = \frac{1}{30}$$

$$R\$ 20,00 \times 30 = R\$ 600,00 = \frac{30}{30}$$

Uma torneira pode encher um tanque em 6 horas e uma segunda enche-o em 9 horas. Funcionando juntas encherão o reservatório em quanto tempo?

$$\text{A primeira em 6 horas enche} \rightarrow \frac{6}{6} \text{ do tanque}$$

$$\text{em 1 hora enche} \rightarrow \frac{1}{6}$$

$$\text{A segunda em 9 horas enche} \rightarrow \frac{9}{9} \text{ do tanque}$$

$$\text{em 1 hora enche} \rightarrow \frac{1}{9} \text{ do tanque}$$

$$\text{Juntas} \rightarrow \text{em 1 hora encherão} \rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18} \text{ do tanque}$$

$$\text{Se } \frac{5}{18} = 60 \text{ minutos} \rightarrow \text{então } 60 \text{ min} : 5 = 12 \text{ min} = \frac{1}{18}$$

$$\text{E o tanque inteiro } \frac{18}{18} = 12 \text{ min} \times 18 = 216 \text{ min ou } 3\text{h } 36\text{min}$$

Três torneiras enchem um tanque: a primeira em 15 dias, a segunda em 20 e a terceira em 30 dias. Há um escoadouro que o pode esvaziar em 40 dias. Em quantos dias, estando as três torneiras e o escoadouro a funcionar, poderá o tanque ficar cheio?

**A primeira** em 15 dias enche  $\rightarrow \frac{15}{15}$  do tanque  $\rightarrow$  em 1 dia  $\rightarrow \frac{1}{15}$

**A segunda** em 20 dias enche  $\rightarrow \frac{20}{20}$  do tanque  $\rightarrow$  em 1 dia  $\rightarrow \frac{1}{20}$

**A terceira** em 30 dias enche  $\rightarrow \frac{30}{30}$  do tanque  $\rightarrow$  em 1 dia  $\rightarrow \frac{1}{30}$

**O escoadouro** em 40 dias enche  $\rightarrow \frac{40}{40}$  do tanque  $\rightarrow$  em 1 dia  $\rightarrow \frac{1}{40}$

**Juntos** - em 1 dia encherão  $\rightarrow \frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} - \frac{1}{40} = \frac{15}{120}$  do tanque

**Macete:** Por regra de três  $\rightarrow \frac{15}{120}$  (do tanque) em 1 dia

$\frac{120}{120}$  (todo tanque) em **x** dias

$$x = \frac{\frac{120}{120} \times 1 \text{ dia}}{\frac{15}{120}} = \frac{120}{120} \times 1 \text{ dia} \times \frac{120}{15} = 8 \text{ dias}$$

### Exercícios

Achar  $\frac{3}{5}$  de 120m.

Calcular os  $\frac{2}{3}$  dos  $\frac{3}{4}$  de 200.

Roberto comprou os  $\frac{3}{8}$  de uma lata de biscoitos por R\$ 9,00. Quanto pagaria pela lata cheia?

Para ladrilhar  $\frac{3}{5}$  de uma parede são gastos 48 ladrilhos. Quantos ladrilhos serão necessários para ladrilhar  $\frac{5}{8}$  da mesma parede?

Uma pessoa gastou  $\frac{3}{8}$  da quantia que possuía. Depois recebeu R\$ 120, 00 e ficou com R\$ 480, 00. Qual a quantia que possuía?

Um operário gastou, no almoço, os  $\frac{2}{7}$  do que possuía. Após o almoço gastou R\$ 90, 00 em várias compras, voltando para casa com R\$ 50, 00. Quanto possuía?

Certa quantia foi repartida entre três pessoas. A primeira recebeu os  $\frac{2}{5}$  mais R\$ 10, 00; a segunda recebeu  $\frac{1}{3}$  mais R\$ 15, 00 e a terceira os R\$ 35, 00 restantes. Qual era a quantia?

Uma torneira enche um reservatório em 4 horas e outra o enche em 2 horas. Estando o reservatório vazio e as duas torneiras abertas, em quanto tempo encherão o reservatório?

Uma peça de fazenda foi dividida entre três pessoas. A primeira ficou com  $\frac{1}{6}$  da peça e mais 5m; a segunda com  $\frac{3}{7}$  da peça e mais 6m; a terceira com os 23m restantes. Qual o comprimento da peça?

Dois terços de um terreno servem para pastos e  $\frac{1}{5}$  do mesmo terreno está cultivado. Sabendo - se que os 300m<sup>2</sup> restantes são ocupados pela residência do proprietário, pergunta - se:

Qual a área do terreno? Qual a extensão do pasto? Qual a área cultivada?

11) Uma torneira enche  $\frac{2}{3}$  de um tanque em 12 minutos; outra enche  $\frac{3}{4}$  do mesmo tanque em 9 minutos. Em quanto tempo, funcionando conjuntamente, poderá o tanque ficar cheio?

12) Três pessoas podem fazer um trabalho: a primeira em 10 dias, a segunda em 8 dias. Depois de 2 dias a primeira abandonou o trabalho após 3 dias do acontecido, a segunda abandonou. Em quanto tempo a terceira poderá fazer o trabalho todo, se fez o restante em 14 dias?

13) Uma torneira enche um tanque em 12 horas. Outra pode enchê-lo em 8 horas. Em quanto tempo as duas poderão encher  $\frac{3}{4}$  do referido tanque?

14) Duas torneiras enchem um tanque; a primeira e a segunda em 3 horas e 36 minutos. Determinar em quanto tempo a segunda poderá encher o tanque, se a primeira o enche em 9 horas.

Um escoadouro esvazia um tanque em 8 horas e uma torneira o pode encher em 10 horas. Estando o tanque previamente cheio, em quanto tempo poderemos ter, apenas,  $\frac{2}{5}$  de sua capacidade?

Determinar o peso de 10 bolas de futebol, sabendo-se que uma bola pesa 1 quilo mais meia bola.

Uma pessoa gastou  $\frac{2}{5}$  de certa importância mais R\$ 400,00, ficando com  $\frac{1}{3}$ . Quanto possuía?

18) Num quintal  $\frac{1}{5}$  das aves são galinhas,  $\frac{2}{3}$  são pombos. Quantas galinhas e quantos pombos existem, se há 32 perus?

Certo vendedor de ovos vendeu ao primeiro freguês,  $\frac{1}{3}$  dos ovos que levava; ao segundo,  $\frac{1}{4}$  do resto; ao terceiro  $\frac{1}{5}$  do novo resto e ainda lhe sobraram 12 ovos. Quantos ovos possuía?

Um vendedor vendeu ao primeiro freguês  $\frac{1}{3}$  das laranjas que levava mais 12; ao segundo  $\frac{1}{3}$  do resto mais 4; ao terceiro  $\frac{1}{2}$  do novo resto mais 10, ficando sem nenhuma. Quantas laranjas possuía?

Respostas:

- |                 |                            |                              |
|-----------------|----------------------------|------------------------------|
| 1) 72m          | 9) 84 m                    | 15) 24h                      |
| 2) 100          | 10) a) 2.250m <sup>2</sup> | 16) 20 Kg                    |
| 3) R\$ 24,00    | b) 1.500 m <sup>2</sup>    | 17) R\$ 1.500                |
| 4) 50 ladrilhos | c) 450 m <sup>2</sup>      | 18) 48 galinhas e 160 pombos |
| 5) R\$ 576      | 11) 7min 12s               | 19) 30 ovos                  |
| 6) 196          | 12) 80 dias                | 20) 72 laranjas              |
| 7) 225          | 13) 3h 36min               |                              |
| 8) 1h 20min     | 14) 6 h                    |                              |

### Operações com números decimais

#### Adição e subtração

Regras:

1º) Igualamos o número de casas decimais, acrescentando zeros;

2º) Colocamos vírgula debaixo de vírgula.

Ex.:

1)  $4,25 + 6 + 3,982 =$

$$\begin{array}{r} 4,250 \\ + 6,000 \\ \hline 3,982 \\ \hline 14,232 \end{array}$$

2)  $13,8 - 6,429 =$

$$\begin{array}{r} 13,800 \\ - 6,429 \\ \hline 7,371 \end{array}$$

3)  $2 - 1,735 =$

$$\begin{array}{r} 2,000 \\ - 1,735 \\ \hline 0,265 \end{array}$$

**Obs:** A vírgula em um número inteiro está logo após o algarismo das unidades.

## Multiplicação

Multiplicamos como se fossem inteiros. O número de casas decimais do resultado será igual à soma das casas decimais dos fatores.

Ex.:

1)  $2,35 \times 3,42 =$

$$\begin{array}{r} 2,35 \\ \times 3,42 \\ \hline \end{array}$$

2 casas decimais

470 2 casas decimais

2)  $8,541 \times 0,01 =$

$$\begin{array}{r} 8,541 \\ \times 0,01 \\ \hline \end{array}$$

3 casas decimais

2 casas decimais

0,08541 ← 5 casas decimais

## divisão

Igualar com zeros as casas decimais do dividendo e do divisor. Cortar as vírgulas e efetuar a divisão.

Obs.: a) Depois de colocar a vírgula no quociente, podemos acrescentar um **zero** no dividendo.

Se ao acrescentarmos um **zero** no dividendo não for possível a divisão, vamos acrescentando zeros no quociente e no dividendo, até tornar possível a divisão.

Ex.:

1)  $7,36 : 0,5 =$

$$\begin{array}{r} 7,36 \quad | \quad 0,50 \\ 50 \quad | \\ \hline 14,72 \\ 360 \\ 100 \\ 00 \end{array}$$

2)  $9,57434 : 4,78 =$

$$\begin{array}{r} 9,57434 \quad | \quad 4,78000 \\ 957434 \quad | \quad 478000 \\ \hline 1434000 \quad 2,003 \\ 0000000 \end{array}$$

**Obs.:** Quando igualamos as casas decimais do quociente e divisor, estamos aplicando a propriedade fundamental das frações. Por quê? Procure descobrir.

## Transformação de frações em números decimais

Basta dividir o numerador pelo denominador.

Ex.:

1)  $\frac{1}{2} = 0,5$

$$\begin{array}{r} 10 \quad | \quad 2 \\ 0 \quad 0,5 \end{array}$$

2)  $\frac{3}{25} = 0,12$

$$\begin{array}{r} 30 \quad | \quad 25 \\ \hline 0,12 \\ 0 \end{array}$$

3)  $\frac{77}{100} = 0,77$

$$\begin{array}{r} 770 \quad | \quad 100 \\ 700 \quad 0,77 \\ 0 \end{array}$$

## Transformação de números decimais em frações

No numerador escrevemos o número decimal sem vírgula e, no denominador, escrevemos a unidade acompanhada de tantos **ZEROS** quantas forem as casas decimais.

$$1) 1,5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

Ex.:

$$2) 1,75 = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$$

obs.: 1. Todo o zero que vier a direita da vírgula e depois do último algarismo significativo, pode ser omitido.

Ex.:

$$2,3070 = 2,307$$

$$3,10103000 = 3,10103$$

Da mesma forma, todo **zero** que vier a esquerda de um número inteiro, não tem significado.

Ex.:

$$0215 = 215$$

$$0001876 = 1876$$

Muitas vezes, em determinadas expressões, é mais fácil transformarmos os números decimais em frações e realizarmos as operações. A fração resultante, voltamos a transformar em número decimal.

Ex.:

$$a) 0,5 \times 0,32 \times 0,04 = \frac{5 \times 32 \times 4}{10 \times 100 \times 100} = \frac{640}{100000} = 0,0064$$

$$b) 0,003 : 5 = \frac{30}{10000} : 5 = \frac{30}{10000} \times \frac{1}{5} = \frac{6}{10000} = 0,0006$$

### Exercícios

Resolva as expressões abaixo:

$$12,8 + 1,402 + 31,04 =$$

$$13,8 - 6,381 =$$

$$1 - 0,235 =$$

$$0,82 - 0,031 + 23,401 =$$

$$13,25 \times 50,7 =$$

$$5,41 \times 0,0002 =$$

$$1,001 \times 1,005 =$$

$$2,814 : 1,2 =$$

$$13,0382 : 9,73 =$$

$$0,0162 : 1,35 =$$

Determinar o valor das seguintes expressões:

$$2 + (3,1 - 1,85) =$$

$$\frac{0,72 : 12}{1,6 \times 0,125} =$$

$$\frac{0,02 + 0,03}{0,001} \times \frac{0,01}{0,001} =$$

$$d) 0,002 + \frac{0,5 \times 0,2}{0,01} =$$

Resp.:

- a) 45,242    b) 7,419    c) 0,765    d) 24,19  
 e) 671,775    f) 0,001082    g) 1,006005  
 h) 2,345    i) 1,34    j) 0,012  
 a) 3,25    b) 0,3    c) 500    d) 40,002

### Dízimas

Na transformação de frações em números decimais, quando a divisão não for exata, e a partir de um certo momento os algarismos começam a se repetir, dizemos que fração se transforma numa **DÍZIMA PERÓDICA**.

- Período → é a parte que se repete.

- Parte não periódica → é a parte entre a vírgula e o período.

- **Representação das dízimas periódicas**

$$0,777 \dots = 0,(\overline{7}) = 0,7$$

Período → 7 - Parte não periódica → não há

$$0,1333 \dots = 0,1(\overline{3}) = 0,13$$

Período → 3 - Parte não periódica → 1

### - Dízimas periódicas simples

Quando o período vem logo após a vírgula.

Ex.: 0,777... ; 1,333...

### - Dízimas periódicas compostas

Quando o período não vem logo após a vírgula.

Ex.: 0,2555 ... ; 2,1666 ...

### - Geratriz de uma dízima periódica

É a fração ordinária que dá origem a dízima.

### - Geratriz das dízimas periódicas simples

É a fração ordinária que tem para numerador o período e para denominador tantos **NOVES** quantos forem os algarismos do período.

Ex.: Achar a geratriz das dízimas:

$$0,333 \dots \rightarrow 0,333 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0,454545 \dots \rightarrow 0,454545 \dots = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$$

$$1,777 \dots \rightarrow 0,777 \dots = 1 \frac{7}{9} = \frac{16}{9}$$

### Exercícios

Achar a geratriz das dízimas:

0,181818 ...      2) 1,030303 ...      3) 2,6

Resp.: 1)  $\frac{2}{11}$       2)  $\frac{34}{33}$       3)  $\frac{8}{3}$

### - Geratriz das dízimas periódicas compostas

É a fração ordinária que tem para numerador a parte não periódica, seguida do período, menos a parte não periódica, e para denominador um número formado de tantos **NOVES** quantos forem os algarismos do período, seguidos de tantos **ZEROS** quantos forem os algarismos da parte não periódica.

Ex.: Achar a geratriz das dízimas:

$$0,1777 \dots \rightarrow 0,1777 \dots = \frac{17-1}{90} = \frac{16}{90} = \frac{8}{45}$$

$$0,10333 \dots \rightarrow 0,10333 \dots = \frac{103-10}{900} = \frac{93}{900} =$$

$$\frac{31}{300}$$

$$2,1666 \dots = 2 \frac{16-1}{90} = 2 \frac{15}{90} = \frac{195}{90} = \frac{13}{6}$$

### Exercícios:

Achar a geratriz das dízimas:

0,2666 ...    b) 0,02030303...    c) 1,0(3)

### Resolver:

a)  $1,2333 \dots : \frac{37}{40} + 0,777 \dots \times \frac{3}{2} - \frac{60}{41} \times 1,3666 \dots =$

$$3,666 \dots \times \frac{6}{11} + 2,(3) + \frac{14}{3} + 2,3(1) \times \frac{15}{104} =$$

$$0,3222 \dots \times \frac{30}{29} + 0,\bar{3} + 0,(6) + \frac{0,\bar{45}}{\frac{3}{11}} =$$

$$3,5 + 2,1666 \dots + 0,444 \dots + \frac{5}{9} =$$

Resp.: 1) a) 4/15      b) 67/3300      c) 31/30

a) 1/2      b) 17/6      c) 5/2      d) 97/15

### → EXERCÍCIOS

01) (PUC-SP) O número  $(0,666 \dots)^2$  é igual a :

a) 0,3666...

b) 0,363636...

c) 0,444...

d) 0,4000...

e) 0,1333...

02) (CESGRANRIO) Considere a expressão :

$$0,999 \dots + \frac{1/5 + 1/3}{3/5 - 1/15}$$

a) 9/10

b) 2

c) 19/10

d) 15/9

e) 1

03) (UFRN) Se a fração irredutível  $a/b$  é a geratriz da dízima 2,030303...então :

a)  $a = 2b + 1$

b)  $a = b + 1$

c)  $b = a - 2$

d)  $b = a - 1$

Resp.: 01) c

02) b

03) a

e)  $b = 2a - 1$

#### **14. SISTEMA MÉTRICO DECIMAL**

Unidades de comprimento

A unidade fundamental é o metro, seus múltiplos e sub-múltiplos encontram-se no quadro abaixo:

	<b>Nomes</b>	<b>Símbolos</b>	<b>Valor</b>
<b>Múltiplos</b>	quilômetro	km	1000 m
	hectômetro	hm	100 m
	decâmetro	dam	10 m
<b>Unidades</b>	metro	m	1 m
	decímetro	dm	0,1 m
	centímetro	cm	0,01 m
<b>Sub-múltiplos</b>	milímetro	mm	0,001 m

Pelo quadro observamos:

Todos os símbolos são escritos com letras minúsculas.

Ex.: km, hm, dam, m, dm, cm, mm

Não se escrevam as abreviaturas no plural.

Ex.: 40m e não 40ms

Não se escreve ponto após as abreviaturas.

Ex.: 20m e não 20m.

CADA UNIDADE DE COMPRIMENTO É 10 VEZES MAIOR QUE A UNIDADE IMEDIATAMENTE INFERIOR. Essa propriedade nos permite escrever:

1km - 10hm - 100dam - 1000m - 10.000dm - 100.000cm - 1.000.000mm

#### **Conversão das unidades de comprimento**

A vírgula anda de uma em uma casa decimal.

Ex.: a) 5,87 Km = ..... cm → A vírgula vai se deslocar para a direita.

km	hm	dam	m	dm	cm
5,	8,	7,	0,	0,	0,

Resp.: 587000 cm

3500 cm = ..... km → A vírgula vai se deslocar para a esquerda.

km	hm	dam	m	dm	cm
0,	0,	3,	5,	0,	0,

**Resp.:** 0,03500 km = 0,035 km

#### **Exercícios**

Converter:

0,03 dam = ..... cm

2,087 hm = .....mm

21,3 cm = ..... hm

285,19 dm = .....Km

2100 mm = .....hm

13240= .....dam

Resolver:

3,45 hm + 35,2m + 1400mm = ..... dm

0,0034km + 3,2 dm + 12100cm = .....m

2,3 dam + 0,3mm +  $\frac{2}{5}$  m = ..... cm

$\frac{0,2}{4}$  dam + 120 cm +  $\frac{1,2}{3}$  m = .....dm

Resp.:

1) a) 30cm    b) 208700mm    c) 0,00213hm    d) 0,028519km    e)0,021hm

f) 13,24dam

a) 3816dm    b) 124,72m    c) 2340,03cm    d) 21dm

**Unidades de superfície (área)**

km <sup>2</sup>	hm <sup>2</sup>	dam <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>	dm <sup>2</sup>	cm <sup>2</sup>	mm <sup>2</sup>
-----------------	-----------------	------------------	----------------	-----------------	-----------------	-----------------

Cada unidade de superfície é 100 vezes maior que a unidade imediatamente inferior.

1m<sup>2</sup> = 100dm<sup>2</sup>;    1hm<sup>2</sup> = 100 dam<sup>2</sup>; ....

**Conversão das unidades de superfície**

A vírgula anda de duas em duas casas decimais. Ex.:

a) 7,03 dam<sup>2</sup> = ..... m<sup>2</sup> → A vírgula vai se deslocar para a direita.

7,03; → Resp.: 703 m<sup>2</sup>

100900 mm<sup>2</sup> = ..... dam<sup>2</sup> → A vírgula vai se deslocar para a esquerda

0,00,10,09,00 → Resp.: 0,001009 dam<sup>2</sup>

**Exercícios**

Resolver:

4,195 dam<sup>2</sup> = ..... mm<sup>2</sup>

432180 cm<sup>2</sup> = ..... m<sup>2</sup>

0,08035 m<sup>2</sup> = ..... cm<sup>2</sup>

19,32 m<sup>2</sup> = .....hm<sup>2</sup>

0,032 dam<sup>2</sup> = ..... dm<sup>2</sup>

0,00834 dm<sup>2</sup> = ..... km<sup>2</sup>

Resp.:

a) 419500000 mm<sup>2</sup>

d) 43,2180 m<sup>2</sup>

b) 803,5 cm<sup>2</sup>

e) 0,001932 hm<sup>2</sup>

c) 320 dm<sup>2</sup>

f) 0,0000000000834 km<sup>2</sup>

**Unidades agrárias**

- hectare(ha) → corresponde ao hm<sup>2</sup>

- are(a) → corresponde ao dam<sup>2</sup>

- centiare(ca) → corresponde ao m<sup>2</sup>



A vírgula anda de uma em uma casa decimal.

A vírgula vai se deslocar para a direita.

Ex.: a) 127 dal = ..... cl → A vírgula vai se deslocar para a direita.

127,0,0,0, Resp.: 127000 cl

48,7 dl = ..... hl → A vírgula vai se deslocar para a esquerda.

0,0,4,8,7 Resp.: 0,0487 hl

### Exercícios

Converter:

3,19 kl = ..... l

3450 l = ..... kl

0,03 dal = ..... dl

1,34 dl = ..... dal

141 dal = ..... ml

0,053 cl = ..... hl

### Relação entre as unidades de volume e unidades de capacidade

$1 \text{ m}^3 = 1 \text{ kl}$	$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$	$1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$
--------------------------------	--------------------------------	---------------------------------

### Exercícios

Converter:

19,3 hl = .....  $\text{m}^3$

$31,45 \text{ cm}^3 = \dots\dots\dots \text{cl}$

$2,813 \text{ m}^3 = \dots\dots\dots \text{ml}$

$8140 \text{ cm}^3 = \dots\dots\dots \text{dl}$

1980 ml = .....  $\text{m}^3$

$0,18 \text{ kl} = \dots\dots\dots \text{dam}^3$

Resp.:

a) 3190 l b) 3 dl c) 1410000 ml d) 3,45 kl e) 0,0134 dal f) 0,0000053 hl

a)  $1,93 \text{ m}^3$  b) 2813000 ml c)  $0,00198 \text{ m}^3$  d) 3,145 cl e) 81,4 dl f)  $0,00018 \text{ dam}^3$

### Unidades de massa

quilograma	hectograma	decagrama	grama	decigrama	centigrama	miligrama
kg	hg	dag	g	dg	cg	mg

Cada unidade é 10 vezes maior que a unidade imediatamente inferior.

$1 \text{ kg} = 10 \text{ hg}$  ;  $1 \text{ g} = 10 \text{ dg}$  ; .....

### Conversão das unidades de massa

A vírgula anda de uma em uma casa decimal.

Ex.: a) 17,4 dag = ..... cg → vírgula vai se deslocar para a direita.

17,4,0,0, Resp.: 17400 cg

197 dg = .....hg → A vírgula vai se deslocar para a esquerda.

0,1,9,7 Resp.: 0,197 hg

**Obs:** Temos também como unidades de massa.

Tonelada (t) → corresponde a 1000 kg

Arroba → corresponde a 15 kg

Quilate → corresponde a 0,2 g

### Exercícios

1,34 t = ..... kg

13,4 t = ..... dag

12350 kg = ..... dag

0,023 t = ..... cg

$$28340 \text{ g} = \dots\dots\dots \text{ t}$$

$$1,98 \text{ g} = \dots\dots\dots \text{ mg}$$

$$1979,35 \text{ cg} = \dots\dots\dots \text{ t}$$

$$12,34 \text{ cg} = \dots\dots\dots \text{ dag}$$

- Respostas:** a) 1340 kg    b) 1235000 dag    c) 1340000 dag    d) 2300000 cg  
e) 0,02834t    f) 0,0000197935t    g) 1980 mg    h) 0,01234 dag

Nota: Alqueire é uma medida agrária e vale aproximadamente 24.000 m<sup>2</sup>.

## RAZÕES E PROPORÇÕES

### 1. Razão

Chama-se **razão de dois números**, dados numa certa ordem e sendo o segundo diferente de zero, ao quociente do primeiro pelo segundo. O primeiro é chamado antecedente, o segundo conseqüente e os dois números dizem-se termos da razão.

Em símbolos, a razão entre os números a e b ( $b \neq 0$ ) é  $\frac{a}{b}$  ou a : b (lê-se a está para b), onde a é o antecedente e b é o conseqüente.

Ex.: Razão entre 4 e 3 =  $\frac{4}{3}$

Razão entre 3 e 4 =  $\frac{3}{4}$

Razão entre 8 e 10 =  $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

**Obs.:** Razão entre duas grandezas é o quociente dos valores dessas grandezas na mesma unidade.

Ex.:

Razão entre 6 g e 15 g  $\rightarrow \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

Razão entre 100cm e 2m  $\rightarrow \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$  (Obs.: 2m = 200cm)

Razão entre 20min e 3h  $\rightarrow \frac{20}{180} = \frac{1}{9}$  (Obs.: 3h = 180min)

Determine a escala de um desenho no qual um comprimento de 5m está representado por um comprimento de 2cm.

$$\text{Escala} = \frac{\text{medida no desenho}}{\text{medida real}} = \frac{2}{500} = \frac{1}{250} = 1:250 \text{ (Obs.: 5m = 500cm)}$$

### Razões inversas

Dizemos que duas razões são inversas quando o antecedente de uma é o conseqüente da outra e vice-versa. Ex.: 3/7 e 7/3.

### Razões iguais

Duas razões são iguais quando as frações que as representam são equivalentes.

Ex.: as razões  $\frac{6}{8}$  e  $\frac{9}{12} \rightarrow \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$  e  $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

## Exercícios

Uma escola tem  $600\text{m}^2$  de área construída e  $1000\text{m}^2$  de área livre. A razão da área construída para a área livre é \_\_\_\_\_.

A escala da planta de um terreno na qual o comprimento de 60 metros foi representado por um segmento de 3 cm é \_\_\_\_\_.

Sabe-se que, das 500 galinhas de um aviário, 100 não foram vacinadas e 150, vacinadas, morreram. Entre as galinhas vacinadas, a razão do n° de mortas para o n° de vivas é \_\_\_\_\_.

Num exame, havia 180 candidatos. Tendo sido aprovados 60, a razão entre o n° de reprovados e de aprovados é \_\_\_\_\_.

Respostas:

1)  $\frac{3}{5}$     2) 1:2000    3)  $\frac{3}{5}$     4) 2

## Proporções

Chama-se proporção a igualdade entre duas razões.

Ex.:  $\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$  é uma proporção, pois as razões que a formam, são iguais.

**Representação:**  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ou  $a : b = c : d$  ou  $a : b = c : d$

**Lemos:** a está para b assim como c está para d

**Termos da proporção:** a → 1° Termo ou antecedente da 1ª razão

b → 2° termo ou conseqüente da 1ª razão

c → 3° termo ou antecedente da 2ª razão

d → 4° termo ou conseqüente da 2ª razão

a e d são os extremos da proporção

b e c são os meios da proporção

## c. Propriedade das proporções

### 1ª Propriedade - Fundamental

O produto dos meios é igual ao produto dos extremos e vice-versa.

Ex.: a)  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \rightarrow 3 \times 4 = 2 \times 6$

$$12 = 12$$

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{12} \rightarrow 5 \times 6 = 3 \times 12$$

$$30 \neq 36 \rightarrow \text{não é proporção}$$

NOTA: **ALTERNAR** uma proporção é trocar a posição dos meios ou extremos.

Ex.:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  ou  $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

- **INVERTER** uma proporção é inverter as razões que a compõe.

$$\text{Ex.: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

- **TRANSPOR** uma proporção é trocar a ordem das razões.

$$\text{Ex.: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

### Exercícios

Determine o valor de  $x$  nas proporções, utilizando a propriedade fundamental:

$$\frac{20}{25} = \frac{8}{x}$$

$$\frac{3/4}{2x} = \frac{1/5}{1/2}$$

$$\frac{1,222\dots}{\frac{11}{3}} = \frac{x-1}{6}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{9}{6}$$

$$\frac{0,3}{x} = \frac{0,2}{0,5}$$

$$\frac{10}{5} = \frac{20}{2x}$$

$$\frac{x-3}{x+1} = \frac{3}{5}$$

Resp.: a) 10    b) 3    c) 5    d) 15/16    e)  $\frac{3}{4}$     f) 9    g) 3

### 2ª Propriedade

A soma (ou diferença) dos antecedentes está para a soma (ou diferença) dos conseqüentes, assim como qualquer antecedente está para o seu conseqüente.

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{ou} \quad \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

### Exercícios Resolvidos

Determine os valores de  $x$  e  $y$  que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \end{cases}$$

Aplicando a 2ª propriedade temos:  $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{30}{3+2} = \frac{6}{5} = \frac{6}{5}$

Então  $\frac{x}{3} = \frac{6}{5} \rightarrow \boxed{x=18}$  e  $\frac{y}{2} = \frac{6}{5} \rightarrow y=12$

Achar dois números cuja a soma é 85 e estão na razão  $\frac{2}{3}$ .

Montado o problema ficamos com  $\begin{cases} x + y = 85 \\ \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \end{cases}$  alternando  $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$

Aplicando a 2ª propriedade temos:  $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{x+y}{2+3} = \frac{85}{5} = \frac{17}{1}$

Então  $\frac{x}{2} = 17 \rightarrow \boxed{x=34}$  e  $\frac{y}{3} = 17 \rightarrow \boxed{y=51}$

Determine os valores de  $x$  e  $y$  que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{5}{8} \rightarrow \text{alternando } \frac{x}{5} = \frac{y}{8} \rightarrow & \text{multiplicando a 1ª razão por 2, não se modifica, pois é} \\ & \text{uma fração.} \\ 2x - y = 198 \end{cases}$$

$$\text{ficamos com } \begin{cases} \frac{2x}{10} = \frac{y}{8} \\ 2x - y = 198 \end{cases}$$

$$\text{Aplicando a 2ª propriedade: } \frac{2X - Y}{10 - 8} = \frac{\overbrace{2X}^{198} - \underbrace{Y}_8}{2}$$

$$\text{Então } 99 = \frac{2x}{10} \rightarrow 2x = 99 \times 10 \rightarrow x = \frac{990}{2} \rightarrow \boxed{x = 495} \text{ e } 99 = \frac{y}{8} \rightarrow \boxed{y = 792}$$

A diferença entre os consequentes de uma proporção é 2 e os antecedentes são 75 e 45. Achar os consequentes.

$$\begin{cases} X - Y = 2 \\ \frac{75}{X} = \frac{45}{Y} \end{cases} \quad \begin{matrix} 30 \\ \frac{75 - 45}{X - Y} = \frac{75}{X} = \frac{45}{Y} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \nearrow 30x = 150 \rightarrow \boxed{x = 5} \\ \searrow 30y = 90 \rightarrow \boxed{y = 3} \end{matrix}$$

### Proporção prolongada

É a igualdade de mais de duas razões.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \dots$$

Obs.: A 2ª propriedade, vista anteriormente, também se aplica a uma proporção prolongada.

### Exercícios Resolvidos

Determine  $x$ ,  $y$  e  $z$  nos sistemas abaixo:

$$\begin{cases} x + y + z = 180 \\ \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \end{cases}$$

$$\text{Aplicando a 2ª propriedade: } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x + y + z}{2 + 3 + 4} = \frac{180}{9} = \frac{20}{1}$$

$$\text{Então } \frac{x}{2} = 20 \rightarrow \boxed{x = 40} \text{ também } \frac{y}{3} = 20 \rightarrow \boxed{y = 60} \text{ e } \frac{z}{4} = 20 \rightarrow \boxed{z = 80}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 17 \\ \frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{20} \rightarrow \text{multiplicando a 1ª razão por } \underline{2} \text{ e a 2ª por } \underline{3} \end{cases}$$

$$\text{ficamos com } \begin{cases} 2x + 3y + z = 17 \\ \frac{2x}{20} = \frac{3y}{45} = \frac{z}{20} \end{cases}$$

Aplicando a 2ª propriedade:  $\frac{2x}{20} = \frac{3y}{45} = \frac{z}{20} = \frac{2x + 3y + z}{20 + 45 + 20} = \frac{17}{85} = \frac{1}{5}$

Então  $\frac{2x}{20} = \frac{1}{5} \rightarrow 10x = 20 \rightarrow x = \frac{20}{10} \rightarrow \boxed{x = 2}$

Também  $\frac{3y}{45} = \frac{1}{5} \rightarrow 15y = 45 \rightarrow y = \frac{45}{15} \rightarrow y = 3$

E  $\frac{z}{20} = \frac{1}{5} \rightarrow 5z = 20 \rightarrow z = \frac{20}{5} \rightarrow z = 4$

c) 
$$\begin{cases} \frac{x}{6} = \frac{y}{9} = \frac{z}{12} \rightarrow \text{multiplicando a 1ª razão por } \underline{5}, \text{ a 2ª por } \underline{4} \text{ e 3ª por } \underline{3} \\ 5x - 4y - 3z = 10 \end{cases}$$

ficamos com 
$$\begin{cases} \frac{5x}{30} = \frac{4y}{36} = \frac{3z}{36} \\ 5x - 4y - 3z = 10 \end{cases}$$

Aplicando a 2ª propriedade:  $\frac{5x}{30} = \frac{4y}{36} = \frac{3z}{36} = \frac{5x - 4y - 3z}{30 - 36 - 36} = \frac{10}{-42}$

Então  $\frac{5x}{30} = \frac{10}{-42} \rightarrow 5x \cdot (-42) = 30 \cdot 10 \rightarrow x = \frac{300}{-210}$

$\rightarrow x = \frac{10}{-7} = \boxed{x = -\frac{10}{7}}$

Também  $\frac{4y}{36} = \frac{10}{-42} \rightarrow 4y \cdot (-42) = 36 \cdot 10 \rightarrow y = \frac{36 \cdot 10}{4 \cdot (-42)} \rightarrow y = \frac{30 \cdot 10}{4 \cdot (-42)} = \frac{360}{-168} \rightarrow y = -\frac{15}{7}$

$\rightarrow$

$$\boxed{y = -\frac{15}{7}}$$

e  $\frac{3z}{36} = \frac{10}{-42} \rightarrow 3z \cdot (-42) = 36 \cdot 10 \rightarrow z = \frac{36 \cdot 10}{3 \cdot (-42)} = \frac{360}{-126} \rightarrow z = -\frac{20}{7}$

### Exercícios

Achar os valores de x e y, nos sistemas abaixo:

a) 
$$\begin{cases} x + y = 15 \\ \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x - y = 12 \\ \frac{x}{5} = \frac{y}{2} \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} x + y = 20 \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{7} \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} x - y = 56 \\ \frac{x}{y} = \frac{40}{8} \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} x - y = 27 \\ \frac{y}{x} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

f) 
$$\begin{cases} y - x = 21 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{8} \end{cases}$$

Calcular os valores de x, y e z, nos sistemas abaixo:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 22 \\ \frac{x}{8} = \frac{y}{12} = \frac{z}{24} \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + 3y + 2z = 74 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{6} = \frac{z}{8} \end{cases}$$

Calcular os valores de a, b e c, nos sistemas abaixo:

$$a) \begin{cases} \frac{2}{a} = \frac{3}{b} = \frac{4}{c} \\ 2a + 3b - 3c = 5 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2a - 3b + 4c = 9 \\ \frac{a}{6} = \frac{b}{5} = \frac{c}{3} \end{cases}$$

A soma dos antecedentes de uma proporção é 80 e os conseqüentes são 9 e 7. Achar os antecedentes.

A diferença entre os conseqüentes de uma proporção é 6 e os antecedentes são 12 e 4. Achar os conseqüentes.

Achar dois números cuja a diferença é 13 e a razão é  $\frac{3}{4}$ .

A soma de dois números é 55. O maior deles está para 7, assim como o menor está para 4. Quais são os dois números?

Resp.: 1) A)  $x = 6$  e  $y = 9$  b)  $x = 20$  e  $y = 8$  c)  $x = 6$  e  $y = 14$  d)  $x = 70$  e  $y = 14$  e)  $x = 45$  e  $y = 18$  f)  $x = 35$  e  $y = 56$

2) a)  $x = 4$ ,  $y = 6$  e  $z = 12$  b)  $x = 6$ ,  $y = 12$  e  $z = 16$

a)  $a = 10$ ,  $b = 15$  e  $c = 20$  b)  $a = 6$ ,  $b = 12$  e  $c = 3$

45 e 35 5) 9 e 3 6) 39 e 52 7) 35 e 20

### 3ª propriedade

O produto dos antecedentes está para o produto dos conseqüentes, assim como o quadrado de qualquer antecedente está para o quadrado do respectivo conseqüente.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$$

### Exercícios Resolvido

Determine x e y no sistema abaixo:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \\ x \cdot y = 48 \end{cases} \rightarrow \text{alternando } \frac{x}{3} = \frac{y}{4}$$

$$\text{Aplicando a 3ª propriedade em } \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \rightarrow \frac{x \cdot y}{12} = \frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16}$$

$$\text{Então } \frac{x^2}{9} = 4 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm\sqrt{36} \rightarrow x = \pm 6$$

$$\text{E } \frac{y^2}{16} = 4 \rightarrow y^2 = 64 \rightarrow y = \pm\sqrt{64} \rightarrow y = \pm 8$$

## Exercícios

1. Determine os valores de  $x$  e  $y$  nos sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \\ x \cdot y = 108 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{6}{9} \\ x \cdot y = 150 \end{cases}$$

Determine dois números positivos cujo produto é 54 e estão na razão 2 / 3.

Resp.: 1. a)  $x = 9$  e  $y = 12$  b)  $x = 10$  e  $y = 15$  2) 6 e 9

### Quarta proporcional

Chama-se **Quarta proporcional** de três números dados a uma certa ordem, um quarto número que forme com os três primeiros uma proporção.

Ex.: Achar a 4ª proporcional entre 2, 6 e 7

$$\frac{2}{6} = \frac{7}{x} \rightarrow 4^{\text{a}} \text{ proporcional, ou seja } 2x = 42 \rightarrow \boxed{x = 21}$$

### Proporção contínua

É toda a proporção onde os meios são iguais.

$$\text{Ex.: } \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

**obs.:** Alguns autores também consideram contínua, aquelas proporções que possuem os extremos iguais.

### Média proporcional

É o termo repetido de uma proporção contínua.

Ex.: Achar a média proporcional entre 3 e 12.

$$\frac{3}{x} = \frac{x}{12} \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm\sqrt{36} \rightarrow x = \pm 6$$

### Terceira proporcional

Chama-se **terceira proporcional** de dois números dados numa certa ordem, um terceiro que forme com os dois primeiros uma proporção.

Ex.: a) Achar a 3ª proporcional entre 3 e 9

$$\frac{3}{9} = \frac{9}{1x} \rightarrow 3^{\text{a}} \text{ proporcional } \rightarrow 3x = 81 \rightarrow x = \frac{81}{3} \rightarrow \boxed{x = 27}$$

Achar a 3ª proporcional entre 8 e 4, sendo 8 a média proporcional.

$$\frac{4}{8} = \frac{8}{x} \rightarrow 4x = 64 \rightarrow x = \frac{64}{4} \rightarrow \boxed{x = 16}$$

## Exercícios

Calcular a 4ª proporcional dos grupos de números abaixo:

4, 9 e 8      b) 3, 7 e 12

Calcular a 3ª proporcional dos grupos de números abaixo:

2 e 4      b) 0,12 e 0,6      c) 1/2 e 2/5

Calcular a média proporcional dos números:

24 e 6   b) 56 e 14   c) 2 e 8

Resp.: 1. a) 18   b) 28   2. a) 8   b) 3   c) 8/25   3. a) 12   b) 28   c) 4

## MÉDIAS

### Média aritmética

Chama-se média aritmética de  $n$  números, ao quociente da divisão da soma desses números por  $n$ .

$$M_A = \frac{\text{soma dos números}}{n}$$

Ex.: Calcular a média aritmética entre 2, 4, 6 e 8.

$$M_A = \frac{2 + 4 + 6 + 8}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

### Média geométrica

Chama-se **média geométrica** de  $n$  número, a raiz do radical de índice  $n$  do produto desses números.

$$M_G = \sqrt[n]{\text{produto dos números}}$$

Obs.: O cálculo da média proporcional é feito utilizando o conceito de média geométrica de  $2^{\circ}$ .

Ex.: Calcular a média geométrica entre 2,4 e 8.

$$M_G = \sqrt[3]{2 \times 4 \times 8} = \sqrt[3]{64} = 4$$

### c) Média harmônica

Chama-se **média harmônica** entre vários números, o inverso da média aritmética de seus inversos.

Ex.: Calcular a média harmônica entre 1, 1/3 e 1/5.

Os inversos dos números dados são 1, 3 e 5.

A média aritmética dos inversos é:

$$M_A = \frac{1 + 3 + 5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

A média harmônica será o inverso de 3, ou seja  $\frac{1}{3}$

### Média aritmética ponderada

Chama-se **Média aritmética ponderada** de vários números, aos quais se atribuem determinados pesos, ao quociente da divisão, cujo o dividendo é a soma dos produtos destes números pelos respectivos pesos, e o divisor a soma dos pesos.

Ex.: a) Calcular a média aritmética ponderada dos números 4 e 6, os quais possuem pesos 2 e 3, respectivamente.

$$M_{AP} = \frac{4.2 + 6.3}{2 + 3} = \frac{8 + 18}{5} = \frac{26}{5} = 5,2$$

A média de aprovação num colégio é 5. É calculada por média aritmética ponderada, sendo feitas 4 provas bimensais, de pesos 1, 2, 3 e 4 respectivamente. Um aluno obteve notas 6, 6, 5 e 4, respectivamente. Será que foi aprovado?

$$M_{AP} = \frac{6.1 + 6.2 + 5.3 + 4.4}{1 + 2 + 3 + 4} = \frac{6 + 12 + 15 + 16}{10} = \frac{49}{10} \text{ ou seja, média 4,9 (reprovado).}$$

### Exercícios

Calcule a média aritmética entre 13 e 15.

Calcule a média aritmética entre  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{5}{6}$  e  $\frac{3}{8}$ .

Calcule a média geométrica entre 4 e 25.

Calcule a média harmônica entre  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{6}$ .

Calcule a média harmônica entre 2,  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{5}$ .

Calcule a média harmônica entre 8 e 24.

Calcule a média aritmética ponderada dos números 5, 7 e 11, sendo os pesos, respectivamente, 2, 3 e 5.

Calcule a média ponderada de 9, 12, 4 e 6, cujos pesos são 2, 3, 1 e 4, respectivamente.

Resp.: 1) 14 2)  $\frac{21}{32}$  3) 10 4)  $\frac{1}{4}$  5) 2 6) 12 7) 8,6 8) 8,2.

### NÚMEROS PROPORCIONAIS

#### Números diretamente proporcionais

Dois sucessões de números são diretamente proporcionais ou apenas proporcionais, quando formarem razões iguais.

Ex.: Sejam as sucessões:  $\begin{cases} 3, 5, 9 \text{ e } 11 \\ 9, 15, 24 \text{ e } 33 \end{cases}$

$$\frac{\frac{1}{3}}{3} = \frac{\frac{1}{5}}{3} = \frac{\frac{1}{8}}{3} = \frac{\frac{1}{11}}{3} = \frac{1}{33} \text{ (realmente, são proporcionais)}$$

$\rightarrow \frac{1}{3}$  é chamado de fator ou constante ou coeficiente de proporcionalidade.

#### Exercícios Resolvidos

Dividir o número 180 em partes diretamente proporcionais a 3, 4 e 11.

As sucessões (x, y, z) e (3,4,11) são diretamente proporcionais.

$$\text{Logo } \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{11} \\ x + y + z = 180 \end{cases}$$

$$\text{Aplicando a 2ª propriedade das proporções: } \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{11} = \frac{x + y + z}{3 + 4 + 11} \text{ ou seja } \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{11} = \frac{180}{18} =$$

10

$$\text{Então } \frac{x}{3} = 10 \rightarrow \boxed{x = 30} \text{ também } \frac{y}{4} = 10 \rightarrow y = 40 \text{ e } \frac{z}{11} = 10 \rightarrow z = 110.$$

**Macete:** Basta dividir o número pela soma das partes proporcionais e o quociente obtido, multiplicar pelas partes proporcionais.

$$180 \text{ : } 3 + 4 + 11$$

$$\begin{array}{r} 180 \text{ : } 18 \\ 00 \quad 10 \end{array} \rightarrow \begin{cases} 10x3 = 30 \\ 10x4 = 40 \\ 10x11 = 110 \end{cases}$$

Dividir o número 153 em partes proporcionais a  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{3}{4}$ .

Obs.: Quando as partes proporcionais são frações, basta reduzi-las ao mesmo denominador, os novos numeradores, serão as partes.

$$\text{No problema em questão: } \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \rightarrow \frac{8}{12} \cdot \frac{9}{12}$$

Agora as partes deixam de ser fracionárias e passam a ser inteiras, ou seja: 8 e 9.

$$\text{Procedendo como anteriormente: } \begin{array}{r} 153 \text{ : } 17 \\ 00 \quad 9 \end{array} \rightarrow \begin{cases} 9x8 = 72 \\ 9x9 = 81 \end{cases}$$

### Exercícios

Determinar  $x$  e  $y$  nas sucessões diretamente proporcionais  $(2, 3, x)$  e  $(6, y, 15)$ .

A soma de três números é 200. Calculá-los sabendo que são proporcionais aos números 2, 3 e 5.

Dividir 460 em partes proporcionais a  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  e 3.

Resp.: 1)  $x = 5$  e  $y = 9$  2) 40, 60 e 100 3) 60, 40 e 360.

### Números inversamente proporcionais

Duas sucessões de números são inversamente proporcionais, quando os termos da primeira são diretamente proporcionais aos inversos da segunda.

$$\text{Ex.: sejam as sucessões: } \begin{bmatrix} 60, 40, 30, 20 \\ 4, 6, 8, 12 \end{bmatrix}$$

$$\frac{60}{4} = \frac{40}{6} = \frac{30}{8} = \frac{20}{12} \rightarrow 60 \cdot \frac{4}{1} = 40 \cdot \frac{6}{1} = 30 \cdot \frac{8}{1} = 20 \cdot \frac{12}{1}$$

$\boxed{240 = 240 = 240 = 240}$  (realmente, inversamente proporcionais) 240 é chamado de constante de proporcionalidade.

### Exercícios Resolvidos

Dividir 180 em partes inversamente proporcionais aos números  $\frac{1}{5}$  e  $\frac{1}{4}$ .

**Macete:** Basta inverter as partes e então proceder como divisão proporcional.

$$\text{Invertendo as partes: } \frac{1}{5} \text{ e } \frac{1}{4} \rightarrow 5 \text{ e } 4$$

$$\text{Aplicando o macete de divisão proporcional: } \begin{array}{r} 180 \text{ : } 9 \\ 00 \quad 20 \end{array} \rightarrow \begin{cases} 20 \cdot 5 = 100 \\ 20 \cdot 4 = 80 \end{cases}$$

2) Dividir 144 em partes inversamente proporcionais a 3, 4 e 12.

$$\text{Invertendo as partes: } \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \text{ e } \frac{1}{12} \rightarrow \frac{4}{12}, \frac{3}{12} \text{ e } \frac{1}{12} \rightarrow 4, 3 \text{ e } 1$$

$$\begin{array}{r} \text{Então } 144 \quad | \quad 8 \\ \quad \quad \quad \quad | \\ \quad \quad \quad \quad | \\ 64 \quad 18 \quad \quad \left\{ \begin{array}{l} 18.4 = 72 \\ 18.3 = 54 \\ 18.1 = 18 \end{array} \right. \end{array}$$

**Exercícios**

Determinar  $x$  e  $y$  nas sucessões inversamente proporcionais ( 4, 3, x) e (12, y, 2).

Dividir o número 273 em partes inversamente proporcionais aos números 1/ 3, 1/ 4 e 2 /7.

A soma de três números é 380. Calculá-los sabendo que são inversamente proporcionais aos números 2, 5 e 4.

Resp.: 1)  $x = 24$  e  $y = 16$  2) 78, 104 e 91 3) 200, 80 e 100

**18. Redução de complexos**

Notas: 1ª nas resoluções matemáticas:

1 ano possui 360 dias

1 mês possui 30 dias

2ª Também sabemos que:

1 ano tem 12 meses

1 dia tem 24 horas

1 hora tem 60 minutos

1 minuto tem 60 segundos

**Exercícios resolvidos**

Reduzir 5 anos, 3 meses e 15 dias a dias .

5 anos x 360 dias = 1800 dias

3 meses x 30 dias = 90 dias

15 dias → 1905 dias

2) Reduzir 3 horas, 35 minutos e 15 segundos a segundos.

3 horas x 60 minutos = 180 minutos x 60 segundos = 10800 segundos

35 minutos x 60 segundos = 2100 segundos

15 segundos → 12915 segundos

Escrever 1248 dias em anos, meses e dias.

1248 360 dias

1080 3 anos

168 dias 30 dias

150 dias 5 meses

18 dias

Resp.: 3 anos 5 meses 18 dias

Escrever 15301 segundos em horas, minutos e segundos.

15301 segundos 60 segundos

330	255 minutos	60 segundos
301	15 minutos	4 horas

1 segundo

Resp.: 4 horas 15 minutos 1 segundo.

Dividir 27 horas em 8 partes iguais.

27 horas		8
<hr/>		
3 horas x 60 = 180 minutos		
20		
4 minutos x 60 = 240 segundos		
00		

Resp.: 3 horas 22min. 30 seg.

Dividir 32 horas em 6 partes.

32 horas		6
<hr/>		
2 horas x 60 = 120 minutos		5 horas 20 minutos
00		

Resp.: 5 horas 20 minutos

**Exercícios**

Reduzir 6 meses, 22 dias e 21 horas a horas.

Escrever 6252 horas em meses, dias e horas.

Dividir 3 dias em 5 partes.

Dividir 7 meses em 8 partes.

Dividir 17 horas em 8 partes.

Resp.:

- |                                |                                  |
|--------------------------------|----------------------------------|
| 1) 4869 horas                  | 4) 26 dias e 6 horas             |
| 2) 8 meses, 20 dias e 12 horas | 5) 2 horas 7 minutos 30 segundos |
| 3) 14 horas, 24 minutos        |                                  |

**19 Regra de três**

Classificação	{	Simples	{	Direita
			}	Inversa
	{	Composta	{	Direita
			}	Inversa
}			Direita-inversa	

**1ª Simples**

Quando envolve apenas duas grandezas.

**Direta**

Quando as grandezas relacionadas são diretamente proporcionais.

	Diminui		Diminuirá
	10 laranjas custarão	x	Cz\$ 30,00
Ex.:	20 laranjas custam	R\$ 60,00	
	30 laranjas custarão	x	Cz\$90,00
	Aumenta		Aumentará

Isto é, duas grandezas são diretamente proporcionais quando, aumentando(ou diminuindo)uma delas, a outra aumenta ou diminui simultaneamente.

Exercícios resolvidos

Comprei 20 metros de pano de fazenda por R\$ 150,00. Qual o preço de 12 metros?

Obs.: Na montagem, nunca deixe de colocar natureza debaixo de natureza; metros debaixo de metros, custo debaixo de custo, etc.

metros	custo	
20	Cz\$ 150,00	
12	x	
Diminui	Diminuirá	diretamente proporcionais

Quando as grandezas são diretamente proporcionais, a resolução é imediata, como se fosse uma proporção, isto é, multiplicação em cruz.

$$\frac{20}{12} = \frac{150}{x} \rightarrow 20 \cdot x = 12 \cdot 150 \rightarrow x = \frac{12 \cdot 150}{20} \rightarrow \boxed{x = 90} \text{ Resp.: R\$ 90,00}$$

Quatro quilogramas de farinha de trigo produzem 5 pães. Quantos quilogramas de farinha serão necessários para produzir 240 pães?

kg	pães	
4	5	
x	240	
aumentará	aumenta	diretamente proporcionais

$$5 \cdot x = 4 \cdot 240 \rightarrow x = \frac{4 \cdot 240}{5} = 192 \rightarrow \text{Resp.: } 192 \text{ kg}$$

### Inversa

Quando as grandezas relacionadas são inversamente proporcionais

diminui	aumentará
9 operários farão esta obra em	x → 20 dias
Ex: se 12 operários fazem uma obra em	15 dias.
15 operários farão esta obra em	x → 12 dias
aumenta	diminuirá

Isto é, duas grandezas são inversamente proporcionais quando, aumentando uma delas, a outra diminui e reciprocamente, diminuindo uma delas, a outra aumenta.

## Exercícios resolvidos

Com a velocidade de 80 km/h, um automóvel percorre um trajeto em 5 horas. Qual deverá ser sua velocidade para percorrer o mesmo trajeto em 4 horas?

Velocidade	tempo
80 km/h	5 horas
x	4 horas
aumentará	diminui inversamente proporcionais

Sendo inversa, invertendo -se os elementos da grandeza onde não se encontra o “x”, torna-se direta.

Então  $\frac{80}{x} = \frac{4}{5}$  prossegue-se a seguir como direta.

$$4 \cdot x = 80 \cdot 5 \rightarrow x = \frac{80 \cdot 5}{4} \rightarrow x = 100 \quad \boxed{\text{Resposta: } 100 \text{ km/h}}$$

Se 8 operários fazem certo trabalho em 5 dias. Em quantos dias 16 operários farão o mesmo trabalho?

Operários	dias
8	5
16	x
aumenta	diminuirá $\rightarrow$ inversamente proporcionais

Invertendo para torná-las diretamente proporcionais  $\rightarrow \frac{16}{8} = \frac{5}{x}$  e  $16 \cdot x = 8 \cdot 5 \rightarrow x = \frac{8 \cdot 5}{16} = \frac{5}{2}$  dias ou 2,5 dias ou dois dias e 12 horas Respostas: 2 dias e 12 horas

## Exercícios

Um automóvel gasta 20 litros de gasolina para percorrer 130 km. Quantos litros gastará num percurso de 910 km?

Para fazer 50 fardamentos para o Exército, foram gastos 120m de pano. Quanto pano se gastará para fazer 1200 uniformes do mesmo tipo?

Uma torneira enche por dia  $\frac{5}{18}$  de um tanque em 3 horas. Em quanto tempo encherá o tanque todo?

Trabalhando 10 horas por dia, uma turma de operários realizou uma obra em 12 dias. Se trabalhassem 8 horas por dia, quantos dias levariam para realizar a mesma obra?

As rodas dianteiras de um trator têm um perímetro de 1,80m e as traseiras têm 3m de perímetro. Enquanto a roda menor dá 90 voltas, quantas voltas dá a roda maior?

Uma torneira despeja 30 litros de água em 6 minutos. Quanto tempo levará para encher um reservatório de  $1\text{m}^3$  de capacidade?

Em 10 dias, 8 trabalhadores fizeram  $\frac{1}{2}$  do trabalho de que foram incumbidos. Depois disso, 2 trabalhadores abandonaram o serviço. Quantos dias devem os restantes trabalhar para concluir a obra?

## Respostas:

1) 140 litros

2880m

10h 48 min

4) 15 dias

5) 54 voltas

6) 3h 20min

7) 13 dias 8h

## 2ª) Composta

Quando envolve mais de duas grandezas.

### Direta

Quando todas as grandezas envolvidas forem diretamente proporcionais.

Ex.: Quatro máquinas produzem 32 peças de madeira em 8 dias. Quantas peças iguais às primeiras serão produzidas por 10 máquinas em 6 dias?

Máquinas	peças	dias
4	32	8
10	x	6

**Obs.:** Sempre que a grandeza incógnita estiver no meio, devemos deslocá-la para os extremos.

Peças	máquinas	dias
32	4	8
x	10↓	6↓
aumentará	aumenta	diminui
↑	↑	↑
↑ direta ↑		
diminuirá		↑
↑		↑
↑ direta ↑		

**Obs.:** ↓ grandezas diretamente proporcionais  
↑ grandezas inversamente proporcionais

**Obs.:** Comparamos cada grandeza, isoladamente, com a grandeza incógnita.

Para resolvermos montamos uma proporção em que uma das razões é a grandeza incógnita e a outra o produto das outras grandezas.

$$\text{Ou seja } \frac{32}{x} = \frac{4}{10} \cdot \frac{8}{6} \quad \text{ou} \quad \frac{32}{x} = \frac{8}{15} \Rightarrow 8x = 32 \cdot 15 \Rightarrow x = \frac{32 \cdot 15}{8} = 60$$

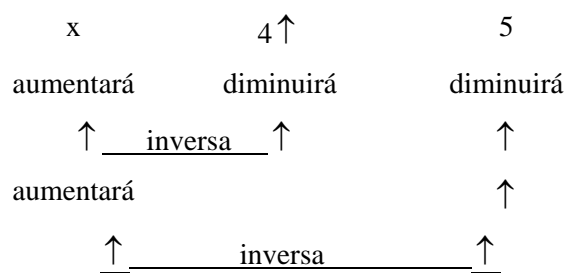
Resposta: 60 peças

### Inversa

Quando todas as grandezas envolvidas forem inversamente proporcionais.

Ex.: Vinte operários fazem certo serviço em 9 dias de 6 horas. Para fazê-lo em quatro dias de 5 horas, quantos operários serão necessários?

Operários	dias	horas
20	9	6



Como regra de três simples, basta invertermos as grandezas inversamente proporcionais e elas se tornam diretas.

Operários	dias	horas
20	4	5 ↓
x	9	6 ↓

E agora resolvemos como anteriormente

$$\frac{20}{x} = \frac{4}{9} \times \frac{5}{6} \text{ ou } \frac{20}{x} = \frac{10}{27} \rightarrow 10 \cdot X = 20 \cdot 27 \rightarrow x = \frac{20 \cdot 27}{10} = 54 \quad \text{Resp.: 54 operários.}$$

### Diretas - inversas

Quando existem os dois tipos de grandezas envolvidas.

Ex.: Uma máquina que funciona 8 horas diárias, durante 30 dias, produz 20.000 peças. Para produzir 2.000 peças, durante 6 dias, deverá funcionar quantas horas por dia?

Horas	dias	peças
8	30	↑ 20000 ↓
x	6	2000
aumentará	diminui	diminui
↑	_____ inversa _____ ↑	↑
diminuirá		↑
↑	_____ direta _____ ↑	↑

Invertendo a grandeza inversamente proporcional

horas	dias	peças
8	6	20.000
x	30 ↓	2.000 ↓

Agora procedemos como anteriormente

$$\frac{8}{x} = \frac{6}{30} \times \frac{20.000}{2.000} \text{ ou } \frac{8}{x} = 2 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4$$

Resp.: 4 horas

### Exercícios Resolvidos

Duas pessoas fazem  $\frac{1}{4}$  de certo trabalho em 8 dias de 9 horas. Em quanto tempo, 4 pessoas, trabalhando 6 horas por dia, poderão fazer a obra toda?

Pessoas	trabalho	horas	dias
2	1 / 4	9	8

4 ↑      4/4 ↓      6 ↑      x

Notamos que existe uma grandeza fracionária, como as frações envolvidas possuem o mesmo denominador, podemos abandoná-los.

2	1	9	8
4 ↑	4 ↓	6 ↑	x

Invertendo as razões inversas e montando a proporção, ficamos com  $\frac{4}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{6}{9} = \frac{8}{x}$  ou  $\frac{1}{3} = \frac{8}{x} \rightarrow x = 24$

**Resp.: 24 dias**

### Exercícios

1) Trabalhando 9 horas por dia, 15 operários fazem 72m de muro em 32 dias. Quantos dias gastarão 18 operários para fazer 180m do mesmo muro, trabalhando 8 horas por dia?

Uma ponte é construída por 25 homens em 2 dias de trabalho, de 9 horas por dia. Esta ponte será construída por 15 homens, nas mesmas condições, trabalhando 10 horas por dia, em quantos dias?

Um livro tem 150 páginas. Cada página tem 36 linhas e cada linha, 50 letras. Se quisermos escrever o mesmo texto em 250 páginas, quantas letras haverá em cada linha, para que cada página tenha 30 linhas?

A despesa com um bico de gás que funcionou 5 horas por dia, durante 9 dias, foi R\$ 36,00. Qual será a despesa se o mesmo bico funcionar 7 horas diárias, durante 30 dias?

Quantos dias gastarão 20 homens para cortar 1.000 estéreos de lenha se 15 homens podem cortar 1.500 estéreos em 30 dias?

10 operários fazem 200 metros de um trabalho em 15 dias de 8 horas. Quantas horas devem trabalhar, por dia, 15 operários, cuja capacidade de trabalho é de duas vezes a dos primeiros, para fazerem, em 8 dias, 900m de outro trabalho, cuja dificuldade seja  $\frac{2}{5}$  da do primeiro?

18 operários fazem certa obra em 6 dias de 4 horas. Em quantas horas por dia, 12 operários que sejam duas vezes mais ativos que os primeiros, poderão fazer a mesma obra, em 9 dias? **NOTA:** Cuidado com as expressões “duas vezes” e “duas vezes mais”.

2 pessoas fazem  $\frac{1}{4}$  de certo trabalho em 8 dias de 9 horas. Em quanto tempo 4 pessoas, trabalhando 6 horas por dia, poderão terminar a obra?

2 pessoas fazem  $\frac{1}{4}$  de certo trabalho em 8 dias de 9 horas. Em quanto tempo, 4 pessoas, trabalhando 6 horas por dia, poderão fazer a obra? **NOTA:** Cuidado com as expressões: “Em quanto tempo poderão terminar o trabalho?” e “Em quanto tempo poderão fazer o trabalho?”

8 pessoas fazem certo trabalho em 8 dias de 9 horas. Em quantos dias, 12 pessoas trabalhando 6 horas por dia, poderão fazer outro trabalho, sabendo-se que as dificuldades entre ambos estão na razão de  $\frac{4}{5}$ , respectivamente?

12 operários iam fazer certo trabalho em 20 dias. Depois de 5 dias de 8 horas, haviam feito somente  $\frac{1}{5}$  da obra. Quantas horas por dia devem trabalhar daí por diante, a fim de terminarem o trabalho no tempo apazado?

12 operários abrem uma vala de 8m de comprimento, 3 de profundidade e 4 de largura em 9 dias de 6 horas. Em quanto tempo, 9 operários poderão abrir outra vala de 5m de comprimento?

### Respostas:

1) 75 dias

3) 36 letras

5) 15 dias

2) 3 dias

4) R\$ 168,00

6) 9 horas

7) 1h 20 min.

9) 24 dias

11) 10h 40 min

8) 18 dias

10) 10 dias

12) 7 dias e 12 horas

## 20. PORCENTAGEM

Porcentagem ou percentagem é qualquer razão cujo conseqüente é 100.

Símbolo : %

Ex.: a)  $\frac{20}{100}$  ou 20% → vinte por cento

$\frac{3}{100}$  ou 3% → três por cento

obs.: Toda razão pode ser escrita sob a forma de porcentagem e vice-versa, toda a porcentagem pode ser escrita sob a forma de razão.

Ex.: a) Exprimir sob a forma de porcentagem a razão  $\frac{3}{5}$ .

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{100} \rightarrow 5x = 300 \rightarrow x = \frac{300}{5} = 60 \quad \text{Resp.: } \boxed{60\%}$$

Expressar sob a forma de razão a porcentagem 16%.

$$16\% = \frac{16}{100} = \frac{4}{25} \quad \text{Resp.: } \boxed{4/25}$$

### Exercícios

Expressar sob a forma de porcentagem:

$\frac{3}{4}$       b)  $\frac{7}{20}$       c)  $\frac{1}{25}$

Expressar sob a forma de razão:

15%      b) 12%      c) 25%

Calcular 25% de 80.

Calcular 8% de R\$ 175,00.

Calcular 12% de R\$ 600,00.

Determine 2% de 3% de R\$ 60.000,00.

### Respostas:

1. a) 75%      b) 35%      c) 4%      4. R\$ 14,00

2. a)  $\frac{3}{20}$       b)  $\frac{3}{25}$       c)  $\frac{1}{4}$       5. R\$ 72,00  
6. R\$ 36,00

3. 20

**Obs.:** Quando queremos representar o total de alguma coisa em porcentagem, representamos por 100%,

pois  $100\% = \frac{100}{100}$  ( lembre-se de fração). Levando em consideração o prescrito anteriormente, é mais

fácil resolver problemas de porcentagem através de regra de três.

### Exercícios resolvidos

Calcular 5% de 40.      40      100%       $x \cdot 100\% = 40 \cdot 5\% \rightarrow x = \frac{40 \cdot 5\%}{100\%} = 2$

$$x \quad 5\%$$

Descontou-se de uma duplicata R\$ 12,00, correspondente a 3%. Qual o valor da duplicata?

$$\text{R\$ 12,00} \quad 3\%$$

$$x \quad 100\% \rightarrow x \cdot 3\% = 12 \cdot 100\% \rightarrow x = \frac{12 \cdot 100\%}{3\%} \rightarrow x = 400$$

**Resp.: R\$ 400,00**

Um negociante pagou uma duplicata de R\$ 500,00, com desconto de 5%. Qual o valor do desconto?

$$100\% \quad \text{R\$ 500,00}$$

$$5\% \quad x \rightarrow 100 \cdot x = 5 \cdot 500 \rightarrow x = \frac{5 \cdot 500}{100} \rightarrow x = 25 \quad \text{Resp.: R\$ 25,00}$$

4) Paguei uma duplicata de R\$ 1.200,00 com desconto de 12%. Qual foi o líquido que paguei?

$$100\% - 12\% = 88\% \rightarrow \text{líquido que paguei.}$$

$$\text{R\$ 1.200,00} \quad 100\%$$

$$x \quad 88\% \rightarrow x \cdot 100 = 1.200 \cdot 88 \rightarrow x = \frac{1.200 \cdot 88}{100} \rightarrow x = 1.056 \quad \text{Resp.: R\$ 1.056,00}$$

Num colégio, 20 alunos foram aprovados. Quantos alunos havia no colégio e qual o número de reprovados, se 60% foram reprovados?

$$100\% \text{ (colégio todo)} - 60\% \text{ (reprovados)} = 40\% \text{ (aprovados)}$$

$$\text{Logo: } 40\% \quad 20 \text{ alunos}$$

$$100\% \quad x \rightarrow 50 \text{ alunos havia no colégio}$$

$$40\% \quad 20 \text{ alunos}$$

$$60\% \quad x \rightarrow 30 \text{ alunos foram reprovados}$$

Uma pessoa vendeu por R\$ 200,00 uma mercadoria que comprara por R\$ 160,00. De quantos por cento, em relação ao custo e a venda, foi o lucro?

$$\text{Sobre o custo: } \text{R\$ 160,00} \quad 100\%$$

$$\text{R\$ 40,00} \quad x \rightarrow 25\%$$

$$\text{Sobre a venda: } \text{R\$ 200,00} \quad 100\%$$

$$\text{R\$ 40,00} \quad x \rightarrow 20\%$$

Um objeto vendido por R\$ 300,00, com o lucro de 20% sobre o custo, quanto custou?

$$100\% \text{ (custo)} + 20\% \text{ (lucro)} = 120\% \text{ (venda)}$$

$$\text{Então: } 120\% \quad \text{R\$ 300,00}$$

$$100\% \quad x \rightarrow \text{R\$ 250,00}$$

Um objeto vendido por R\$ 300,00, apresentou o lucro de 30% sobre a venda. Quanto custou?

$$100\% \text{ (venda)} - 30\% \text{ (lucro)} = 70\% \text{ (custo)}$$

$$\text{Então: } 100\% \quad \text{R\$ 300,00}$$

$$70\% \quad x \rightarrow \text{R\$ 210,00}$$

### Exercícios

Se você tem um desconto de 3% ao pagar à vista uma compra de R\$ 6.000,00, seu abatimento é de \_\_\_\_\_.

Um campo tem 309 m<sup>2</sup> planaltos, o que corresponde a 75% de sua área. A área do terreno é \_\_\_\_\_.

Numa fábrica de calçados há o refugo de 5% da produção. Tendo sido aceitos 4560 pares, a produção total foi de \_\_\_\_\_.

Uma duplicata de R\$ 720,00 foi paga, antes do vencimento, por R\$ 691,20. A taxa de desconto foi \_\_\_\_\_.

Um operário economiza semanalmente R\$ 1.400,00, que são 40% de seu salário. Quanto recebe por semana?

Em uma fábrica, 28% dos operários são mulheres e os homens são 216. Quantos são os operários?

Economizei R\$ 840,00 ao ganhar um desconto de 12% na compra de uma peça. Qual o preço da peça sem o desconto?

Paguei apenas R\$ 2.000,00 por um produto que custava R\$ 2.500,00. Qual a taxa de porcentagem que corresponde ao desconto?

Comprei um automóvel por R\$ 800,00 e anunciei - o à venda com 20% de lucro. Pela insistência de um freguês vendi - o com 10% de desconto no preço do anúncio. Por quanto vendi o carro?

Numa cidade 30% da população são homens; 40% são mulheres. Sabendo-se que há 4.500 crianças, pergunta-se :quantas mulheres, quantos homens há e qual a população da cidade?

Resp.:

R\$ 180,00

R\$ 7.000,00

412m<sup>2</sup>

20%

4.800 pares

R\$ 864.000,00

4%

10) 6.000 mulheres, 4.500 homens e 15.000 habitantes.

R\$ 3.500,00

300

### Porcentagem relativa

É o número decimal que representa a fração correspondente a uma porcentagem.

Ex.:  $20\% = \frac{20}{100} \rightarrow 200 \frac{100}{100} \rightarrow$  que é a porcentagem relativa.

0 0,2

**Obs.:** Você deve ter notado que para achar a porcentagem relativa, basta deslocar a vírgula duas casas para a esquerda (divisão por 100) na porcentagem real.

Ex: a)  $20\% \rightarrow 0,2$

$100\% \rightarrow 1$

$3\% \rightarrow 0,03$

$135\% \rightarrow 1,35$

### Exercícios resolvidos

Calcular 25% de 200 livros.

$$0,25 \times 200 = 50$$

Calcular 70% de 15.000 pregos.

$$0,7 \times 15.000 = 10.500 \text{ pregos}$$

## Exercícios

Calcular:

20% de 30% de R\$ 10.000,00.

7,5% de R\$ 2.000,00.

0,5% de 3 horas.

Resp.: 1) R\$ 600,00

2) R\$ 150,00

3) 54 segundos.

## Radiciação e potenciação de porcentagem

Basta transformarmos a porcentagem real em relativa, realizarmos as operações e, voltarmos a porcentagem real.

Ex.:  $\sqrt{400\%} = \sqrt{4} = 2 = 200\%$

$(30\%)^2 = (0,3)^2 = 0,3 \times 0,3 = 0,09 = \boxed{9\%}$

Obs.: Veja radiciação e potenciação na apostila de álgebra.

## Juros

**Definição** - Juro é a compensação financeira que se paga ou se recebe, quando pedimos ou emprestamos um certo capital.

### Classificação

#### Juros Simples

São os referentes a um capital que permanece constante durante a aplicação.

Ex.: Determinar os juros que R\$ 1.000,00 rendem quando aplicados á taxa de 10% ao mês, durante 6 meses.

No 1º mês vai render 10% de R\$ 1.000,00

Ou seja  $0,1 \times 1.000 = \text{R\$ } 100,00$

No 2º mês vai render 10% de R\$ 1.000,00

Ou seja  $0,1 \times 1.000 = \text{R\$ } 100,00$

No 3º, 4º, 5º e 6º mês também renderá R\$ 100,00

No final do 6º mês o total de juros será  $6 \times 100 = \text{R\$ } 600,00$

Você deve ter notado que mensalmente o juro foi calculado no capital inicial aplicado, o que caracteriza o juro simples.

#### Juros compostos

São os referentes às aplicações em que os juros, a cada intervalo de tempo, são incluídos ao capital, obtendo-se, assim, juros sobre juros.

Ex.: Calcular juros compostos para o problema anterior.

No 1º mês vai render 10% de R\$ 1.000,00

Ou seja  $0,1 \times 1.000 = \text{R\$ } 100,00$

Capital acumulado no final do 1º mês  $1.000 + 100 = \text{R\$ } 1.100,00$

No 2º mês vai render 10% de R\$ 1.100,00

Ou seja  $0,1 \times 1.100 = \text{R\$ } 110,00$

Capital acumulado no final do 2º mês  $1.100 + 110 = \text{R\$ } 1.210,00$

No 3º mês  $0,1 \times 1.210 = \text{R\$ } 121,00 \rightarrow c_{\text{acum}} = \text{R\$ } 1.331,00$

4º mês  $0,1 \times 1.331 = \text{R\$ } 133,10 \rightarrow c_{\text{acum}} = \text{R\$ } 1.464,10$

5º mês  $0,1 \times 1.464,10 = \text{R\$ } 146,41 \rightarrow c_{\text{acum}} = \text{R\$ } 1.610,51$

6º mês  $0,1 \times 1.610 = \text{R\$ } 161,05 \rightarrow c_{\text{acum}} = \text{R\$ } 1.771,56$

No final do 6º mês o total de juros será:  $c_{\text{final}} - c_{\text{inicial}} = 1.771,56$

### Formulário de cálculo

#### Juros simples

$$j = c \cdot i \cdot t \rightarrow$$

- |   |   |   |
|---|---|---|
| { | j | - juros $\rightarrow$ rendimento produzido pelo capital.              |
|   | c | - capital $\rightarrow$ quantia aplicada.                             |
|   | i | - taxa $\rightarrow$ porcentagem relativa que incide sobre a capital. |
|   | t | - tempo $\rightarrow$ período de aplicação.                           |

Obs.: Deve-se ter o cuidado de utilizar a taxa na mesma unidade que o tempo, isto é, se o tempo é em anos, a taxa é em anos; se o tempo é em meses, a taxa é em meses; se o tempo é em dias, a taxa é em dias.

#### Exercícios resolvidos

Um capital de  $\text{R\$ } 450.000,00$  é emprestado à taxa de 7% ao mês, durante 11 meses. Determine os juros simples.

$$C = 450.000$$

$$i = 7\% \text{ ao mês}$$

$$t = 11 \text{ meses}$$

$$j = 450.000 \times 0,07 \times 11 = \text{R\$ } 346.500,00$$

Um capital de  $\text{R\$ } 300.000,00$  é emprestado à taxa de 8% ao mês, durante 2 anos. Determine os juros simples.

$$C = 300.000$$

$$i = 8\% \text{ ao mês}$$

$$t = 2 \text{ anos} = 2 \times 12 = 24 \text{ meses}$$

$$j = 300.000 \times 0,08 \times 24 = \text{R\$ } 576.000,00$$

Obs.: Quando não se define o tipo de juro a calcular, subentende-se juro simples.

Um capital de  $\text{R\$ } 400.000,00$ , empregado durante 9 meses, rendeu juros de  $\text{R\$ } 306.000,00$ . Qual foi a taxa percentual usada?

$$C = 400.000$$

$$t = 9 \text{ meses} \rightarrow 306.000 = 400.000 \times i \times 9 \rightarrow i = \frac{306.000}{400.000 \times 9} \rightarrow i = 0,085 \rightarrow i = 8,5\% \text{ ao mês}$$

Um certo capital, emprestado durante 3 anos, à taxa de 75% ao ano, rendeu juros simples de  $\text{R\$ } 720.000,00$ . Quanto vale o capital?

$$t = 3 \text{ anos}$$

$$i = 75\% \text{ ao ano} \rightarrow 720.000 = c \times 0,75 \times 3 \rightarrow c = \frac{720.000}{0,75 \times 3}$$

$$j = 720.000 \rightarrow c = \text{R\$ } 320.000,00$$

### Exercícios

Determine os juros que R\$ 15.000,00 rendem quando aplicados à taxa de 10% ao mês, durante 6 meses de aplicação.

A importância de R\$ 300.000,00, emprestada a 6% ao ano, no fim de 8 meses rende juros de \_\_\_\_\_.

O valor do capital, para que os juros simples, a uma taxa de 18% ao ano, durante 8 meses, sejam de 576,00 é igual a \_\_\_\_\_.

Quando se aplicam R\$ 20.000,00 e, 10 meses e se obtém R\$ 5.000,00 de juros, a taxa de juros é \_\_\_\_\_.

Um objeto custa à vista R\$ 1.500,00. Quanto pagarei por ele se comprá-lo para pagar em 36 meses, sabendo-se que a loja cobra uma taxa de 2,5% ao mês?

Apliquei R\$ 40.000,00 à taxa de 42% ao ano, e no fim de “x” meses recebi R\$ 8.400,00 de juros. Calcule o valor de “x”.

Pelo pagamento de uma letra de câmbio, cujo valor é de R\$ 800,00 em dois anos paguei R\$ 42,00 de juros. Qual a taxa cobrada?

**Respostas:** 1) R\$ 9.000,00    2) R\$ 12.000,00    3) R\$ 4.800,00

30% ao ano                      5) R\$ 2.850,00    6) 6 meses    7) 0,75 ao ano

Obs.: Montante ou capital acumulado, em juros simples, obtemos somando o capital inicial com os juros obtidos no período considerado.

$$M = c + J \quad m \rightarrow \text{montante}$$

NOTA: Apenas a título ilustrativo, vejamos a fórmula de cálculo de juro composto.

$$M = c(1 + i)^t \rightarrow \text{as letras possuem o mesmo significado que em juro simples.}$$

Aquele exemplo anterior calculado pela fórmula seria:

$$M = 1.000(1 + 0,1)^6 = 1.000 \times (1,1)^6 = \text{R\$ } 1.771,56$$

. x . x . x .

“ Todo aquele que se esmera em cumprir fielmente seus deveres, preenche o fim para qual foi criado e firma em si mesmo os princípios de um caráter elevado”.

. x . x . x .

# ÁLGEBRA

## 1 - CONJUNTOS

A noção de conjunto em matemática é a mesma da linguagem corrente, ou seja, conjunto é sinônimo de agrupamento, coleção, classe etc.

### Exemplo :

- números, países, pessoas, pontos etc

### NOTAÇÃO :

**CONJUNTOS:** São indicados por letras maiúsculas

**ELEMENTOS :** São indicados por letras minúsculas

Se  $x$  é um elemento e  $A$  é um conjunto, então se quisermos indicar que  $x$  é o elemento de  $A$ , usaremos a relação de pertinência, escrevendo

a)  $x \in A$  significa  $x$  pertence a  $A$

b)  $x \notin A$  significa  $x$  não pertence a  $A$

### Exemplo :

Dado o conjunto  $A = \{2, 4, 6, 8\}$

2 pertence a  $A \Rightarrow 2 \in A$

3 não pertence a  $A \Rightarrow 3 \notin A$

### REPRESENTAÇÃO DE CONJUNTOS

Um conjunto pode ser representado de três maneiras:

a) Por enumeração de seus elementos

ex:  $A = \{a, e, i, o, u\}$

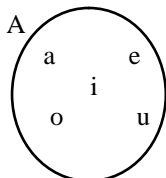
b) Por descrição de uma propriedade característica do conjunto

ex:  $A = \{x / x \text{ é vogal}\}$

c) Através de gráficos

(diagrama de Euler-Venn)

ex:



**CONJUNTO UNITÁRIO :** é o conjunto formado por apenas um elemento.

ex :  $A = \{k\}$

**CONJUNTO VAZIO :** é o conjunto que não possui elementos.

- representado por  $\emptyset$  ou  $\{ \}$

### IGUALDADE DE CONJUNTOS :

Dois conjuntos  $A$  e  $B$  são iguais quando todo elemento de  $A$  pertence a  $B$  e, reciprocamente, todo elemento de  $B$  pertence a  $A$ .

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x) (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Exemplo:

$$\{x \in \mathbb{R} / 2x + 1 = 5\} = \{2\}$$

### SUBCONJUNTO

O conjunto  $A$  é um subconjunto do conjunto  $B$  se todo elemento de  $A$  é elemento de  $B$ .

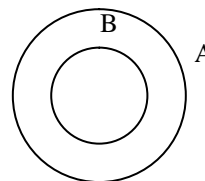
**Simbolicamente :**

$$A \subset B \Rightarrow (\forall x) (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Exemplo :

1)  $\{a, b\} \subset \{a, b, c, d\}$

2)  $\{a\} \subset \{a, b\}$



**Atenção !!**

$$\begin{cases} \emptyset \subset A \\ A \subset A \end{cases} \text{ qualquer que seja o conjunto } A$$

**obs.:**

(  $\in$  ) relação de pertinência entre um ELEMENTO e um CONJUNTO.

(  $\subset$  ) relação de inclusão entre um CONJUNTO e outro CONJUNTO.

### EXERCÍCIOS EM AULA:

Assinale as alternativas corretas sobre o conjunto abaixo  $A = \{\emptyset, 1, 2, \{2\}\}$ .

01)  $\emptyset \in A$

02)  $\emptyset \subset A$

04)  $\{\emptyset\} \subset A$

08)  $\{2\} \in A$

16)  $\{\{2\}\} \subset A$

32)  $\{1,2\} \in A$

64)  $\{2\} \subset A$

## CONJUNTO DAS PARTES DE UM CONJUNTO

Se A é um conjunto qualquer, chama-se conjunto das partes de A, e indica-se P(A) ao conjunto formado por todos os subconjuntos de A.

$$P(A) = \{ x / x \subset A \}$$

### PROPRIEDADES

- a)  $\emptyset \in P(A)$ , qualquer que seja o conjunto A.
- b)  $A \in P(A)$ , qualquer que seja o conjunto A.
- c) Se A tem n elementos, então P(A) tem  $2^n$  elementos.

Obs:

Se um conjunto possui n elementos, então esse conjunto terá  $2^n$  subconjuntos.

Exemplo:

-Dado o conjunto  $A = \{ 1, 2 \}$

considerando:

$$\emptyset \subset \{ 1, 2 \}$$

$$\{ 1 \} \subset \{ 1, 2 \}$$

$$\{ 2 \} \subset \{ 1, 2 \}$$

$$\{ 1, 2 \} \subset \{ 1, 2 \}$$

Logo,  $P(A) = \{ \emptyset, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \} \}$

$$2^n = 2^2 = 4 \text{ elementos.}$$

### EXERCÍCIO EM AULA:

(UEM) Seja A um conjunto com 6 elementos. Determine o número de subconjuntos de A.

## UNIÃO OU REUNIÃO DE CONJUNTO

Dados os conjuntos A e B, chama-se reunião ou união desses conjuntos e escreve  $A \cup B$  ao conjunto constituído pelos elementos de A ou B ou de ambos.

$$A \cup B = \{ x / x \in A \text{ ou } x \in B \}$$

## INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS

Dados os conjuntos A e B, chama-se intersecção desses conjuntos e escreve-se

$A \cap B$  ao conjunto constituído pelos elementos comuns de A e B.

$$A \cap B = \{ x / x \in A \text{ e } x \in B \}$$

Obs:

Dois conjuntos que têm intersecção vazia são chamados de DISJUNTOS.

Ainda temos que :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

### EXERCÍCOS EM AULA:

01) Dados os conjuntos  $A = \{ 0, 1, 2 \}$ ,  
 $B = \{ 1, 3, 4 \}$  e  $C = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$ , determinar :

a)  $A \cup B$

b)  $A \cap B$

02) Numa escola com 500 alunos, 300 praticam judô, 180 praticam karatê e 90 não praticam qualquer modalidade de arte marcial. O número de alunos que praticam apenas karatê é:

03) Numa sala tem 100 alunos. Destes 85 gostam de matemática e 50 de física. Quantos alunos gostam de matemática e física ao mesmo tempo.

## DIFERENÇA DE CONJUNTOS

Dados os conjuntos A e B, chama-se diferença entre A e B e indica-se por  $A - B$  ao conjunto dos elementos de A que não pertencem a B.

$$A - B = \{ x / x \in A \text{ e } x \notin B \}$$

### EXERCÍCIO EM AULA :

Seja  $A = \{ a, b, c, d \}$ ,  $B = \{ b, d, e, f \}$  e  $C = \{ c, d \}$ , determinar:

a)  $A - B$

b)  $B - A$

c)  $A - C$

## COMPLEMENTAR DE B EM A

Quando  $B \subset A$ , o conjunto  $A - B$  é também chamado conjunto complementar de B em relação a A e indica-se :

$$C_A^B = A - B$$

### PROFESSOR :

01) (UEL) Dados os conjuntos

$A = \{ x \in \mathbb{R} / x < 2 \}$  e  $B = \{ x \in \mathbb{R} / x \geq -1 \}$ , o conjunto  $C_{\mathbb{R}}^{(A \cap B)}$  é :

a)  $\{ x \in \mathbb{R} / x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2 \}$

b)  $\{ x \in \mathbb{R} / x < -1 \text{ ou } x \geq 2 \}$

c)  $\{ x \in \mathbb{R} / x \leq -1 \text{ ou } x > 2 \}$

- d)  $\{x \in \mathbb{R} / x < -1 \text{ ou } x > 2\}$   
 e) n.d.a

02) (UFSC) Dados:  
 $A = [2, \infty)$   
 $B = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$   
 $C = [-2, -3)$

Determine a soma dos números associados as alternativas verdadeiras :

- 01)  $A - B = \{0\}$   
 02)  $(A \cup B) \cap C = [-2, -1) \cup [1, 3)$   
 04)  $A \cup B \cup C = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$   
 08)  $C_R^B = [-1, 1)$   
 16)  $A \cap B \cap C = [2, 3]$

## CONJUNTOS NUMÉRICOS

### CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

Números naturais são aqueles que são utilizados na contagem dos elementos de um conjunto. Temos então :

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

### NÚMEROS PRIMOS

Um número inteiro  $P$ , é primo se e somente se, possui apenas dois divisores, ele mesmo e a unidade.

Assim, a seqüência dos números naturais primos é : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 etc

*Obs : dois números são ditos primos entre si se possuem como divisor comum apenas a unidade.*

### CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

Números inteiros são todos os números naturais e também os opostos dos naturais. Temos então :

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

### CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Chama-se racional todo número que é o quociente entre dois números inteiros. temos então :

- a) Os números inteiros

- ex : 13, -4, 0  
 b) Os decimais exatos  
 ex:  $0,75 = 3/4$ ;  $1,5 = 3/2$ ;  $3,57 = 357/100$   
 c) Os decimais não exatos e periódicos (dízimas)

ex : 0,7777...; 0,999...; 1,2333...

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

## CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

### NÚMEROS IRRACIONAIS

Facilmente podemos construir números decimais não exatos e não periódicos. Veja, por exemplo : 0,10100100010000..., onde o número de zeros aumenta de uma unidade após cada algarismo 1.

Números como esse, cuja representação contém infinitas casas decimais após a vírgula e onde não ocorre repetição de períodos como nas dízimas, não são números racionais, esses números são conhecidos pelo nome de números irracionais.

Veja agora mais alguns exemplos de números irracionais :

$$\pi = 3,1415926\dots$$

$$e = 2,718281\dots$$

$$\sqrt{3} = 1,7320508\dots$$

### NÚMEROS REAIS

A união do conjunto  $Q$  dos números racionais com o conjunto  $I$  dos números irracionais chama-se conjunto dos números reais e representa-se por  $\mathbb{R}$ .

$$\mathbb{R} = Q \cup I$$

Pela definição dos racionais e dos reais, concluímos facilmente que :

$$N \subset Z \subset Q \subset \mathbb{R}$$

### PROFESSOR :

- 1) (UEM) É correto afirmar que:

(01) a soma e a diferença de dois números naturais é sempre um número natural

(02) o produto e o quociente de dois números inteiros é sempre um número inteiro

(04) a soma de dois números racionais é sempre um número racional

(08) a soma de dois números irracionais é sempre um número irracional

(16) o produto de dois números racionais é sempre um número racional

02) (UEM) Sobre o subconjunto  $A = \{2, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 13\}$  dos números inteiros  $Z$ , é correto afirmar-se:

- 01)  $\{x \in A / x \text{ é primo}\} = \{3, 5, 7, 11, 13\}$
- 02)  $\{x \in A / x^2 = 9\} = \{3\}$
- 04)  $\{x \in A / x - 1 \notin A\} = \{2, 5, 7, 9, 11\}$
- 08)  $\{x \in A / x + 7 = 11\} = \{4\}$
- 16)  $\{x \in Z / 2x \in A\} = \{1, 6\}$
- 32)  $\{x \in A / x \notin Z\} = \emptyset$

03) Assinale a alternativa correta:

- a) se  $p$  é primo, então  $p$  é ímpar
- b) se  $p$  é primo, então  $p + 2$  é ímpar
- c) se  $p$  é primo, então  $p + 1$  é par
- d) se  $p$  é primo, então  $p^2$  é ímpar
- e) n.d.a.

### EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01) (Mack-SP) Se  $A$  e  $B$  são dois conjuntos tais que  $A \subset B$  e  $A \neq \{ \}$ , então:

- a) sempre existe  $x \in A$  tal que  $x \notin B$ .
- b) sempre existe  $x \in B$  tal que  $x \notin A$
- c) se  $x \in B$ , então  $x \in A$
- d) se  $x \notin B$ , então  $x \notin A$
- e)  $A \cap B = \{ \}$

02) (PUC-SP) Supondo  $A$ ,  $B$  e  $C$  três conjuntos não vazios, assinale a alternativa correta:

- a)  $A \subset C, B \cap C = \{ \} \Rightarrow A \cap B \neq \{ \}$
- b)  $A \subset B, C \cap A \neq \{ \} \Rightarrow C \subset B$
- c)  $A \subset B, C \subset B \Rightarrow A \cap C \neq \{ \}$
- d)  $A \subset B, B \cap C \neq \{ \} \Rightarrow A \cap C \neq \{ \}$
- e)  $A \subset B, C \cap A \neq \{ \} \Rightarrow (A \cap C) \subset B$

03) (FGV) Sejam  $A$ ,  $B$ , e  $C$  conjuntos finitos. O número de elementos de  $A \cap B$  é 30, o número de elementos de  $A \cap C$  é 20 e o número de elementos de  $A \cap B \cap C$  é 15. Então, o número de elementos de  $A \cap (B \cup C)$  é:

- a) 35
- b) 15
- c) 50
- d) 45
- e) 20

04) (PUC-SP) Se  $A$ ,  $B$  e  $A \cap B$  são conjuntos com 90, 50 e 30 elementos, respectivamente, então o número de elementos do conjunto  $A \cup B$  é:

- a) 10
- b) 70
- c) 85
- d) 110
- e) 170

05) (UF-AL) Se  $A$  e  $B$  são dois conjuntos não vazios, tais que:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

$A - B = \{1, 3, 6, 7\}$  e  $B - A = \{4, 8\}$ , então  $A \cap B$  é o conjunto:

- a)  $\{ \}$
- b)  $\{1, 4\}$
- c)  $\{2, 5\}$
- d)  $\{6, 7, 8\}$
- e)  $\{1, 3, 4, 6, 7, 8\}$

06) (UNESP) Se  $A = \{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$ ,

$B = \{1, 2, 3, 6, 8\}$  e  $C = \{1, 4, 6, 8\}$ , então:

- a)  $(A - B) \cap C = \{2\}$
- b)  $(B - A) \cap C = \{1\}$
- c)  $(A - B) \cap C = \{1\}$
- d)  $(B - A) \cap C = \{2\}$
- e) n.d.a

07) (MACK) Sendo  $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$  e

$B = \{2, 3, 7\}$ , então o complementar de  $B$  em  $A$  é :

- a)  $\emptyset$
- b)  $\{8\}$
- c)  $\{8, 9, 10\}$
- d)  $\{1, 5, 8\}$
- e) n.d.a

08) Na festa da casa do Flávio observei que 18 convidados tomaram vodka, 12 tomaram cerveja, 11 tomaram martine, 6 tomaram vodka e cerveja, 5 tomaram vodka e martine, 4 tomaram vodka e martine, 2 tomaram vodka, cerveja e martine. As 8 mulheres mais bonitas só tomaram vinho e as 6 mais feias só tomaram jurubeba e eu que não estava me sentindo muito bem só tomei Jack Daniels. Pergunta-se :

- a) Quantos convidados estavam na festa ?
- b) Quantos convidados só tomaram cerveja ?

09) (ACAFE) Se  $A \subset B$  e  $A \subset C$ , com

$A \neq B \neq C$ , então podemos afirmar que :

- a)  $A \cap B \neq A \cap C$
- b)  $(C - B) \cup A = C$
- c)  $A = B \cup C$
- d)  $A = B \cap C$
- e)  $(B - C) \cap A = \emptyset$

10) (CEFET) Se  $A = ]-3, 2[$ ,

$B = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 2\}$  e  $C = [1, +\infty[$ .

$(A \cap B) \cup (C - B)$  é igual a :

- a)  $]0, 2[$
- b)  $\{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x < 2\}$
- c)  $\emptyset$
- d)  $]-3, 2[$

e)  $\{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

11) Numa escola com 500 alunos, 300 praticam judô, 180 praticam karatê e 90 não praticam qualquer modalidade de arte marcial. O número de alunos que praticam apenas karatê é:

12) Assinale as alternativas corretas sobre o conjunto  $A = \{\phi, 1, 2, \{2\}\}$ .

- 01)  $\phi \in A$
- 02)  $\phi \subset A$
- 04)  $\{\phi\} \subset A$
- 08)  $\{2\} \in A$
- 16)  $\{\{2\}\} \subset A$
- 32)  $\{1, 2\} \in A$
- 64)  $\{2\} \subset A$

13) Numa sala tem 100 alunos. Destes 85 gostam de matemática e 50 de física. Quantos alunos gostam de matemática e física ao mesmo tempo.

14) Assinale a alternativa correta:

- a) se  $p$  é primo, então  $p$  é ímpar
- b) se  $p$  é primo, então  $p + 2$  é ímpar
- c) se  $p$  é primo, então  $p + 1$  é par
- d) se  $p$  é primo, então  $p^2$  é ímpar
- e) n.d.a.

15) (UF-MG) Seja  $N$  o conjunto dos números naturais  $k = \{3x/x \in \mathbb{N}\}$ ,  $L = \{5x/x \in \mathbb{N}\}$  e  $M = \{15x/x \in \mathbb{N}\}$ . Qual a afirmativa correta ?

- a)  $k \cup L = M$
- b)  $k \subset L$
- c)  $N - L = M$
- d)  $k - L = M$
- e)  $k \cap L = M$

16) (CESGRANRIO) A intersecção do conjunto de todos os inteiros múltiplos de 6 com o conjunto de todos os inteiros múltiplos de 15 é o conjunto de todos os inteiros múltiplos de : \_\_\_\_\_

**GABARITO**

- |        |             |        |
|--------|-------------|--------|
| 01) d  | 02) e       | 03) a  |
| 04) d  | 05) c       | 06) b  |
| 07) e  | 08) 43 e 03 | 09) e  |
| 10) e  | 11) 110     | 12) 95 |
| 13) 35 | 14) e       | 15) e  |
| 16) 30 |             |        |

**2 - POTENCIAÇÃO**

Damos o nome de potência a um produto de fatores iguais.

Ex.

a)  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$ , onde 5 é expoente e 2 é a base.

Logo, o expoente indica quantas vezes devemos multiplicar a base por ela mesma.

Ex.

- a)  $2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$
- b)  $5^1 = 5$  (não se escreve o expoente 1)
- c)  $0^5 = 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0$  (qualquer potência de zero é zero)
- d)  $1^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$  (qualquer potência de 1 é igual a 1)

Observação: O expoente 2 é chamado quadrado e o expoente 3 é chamado cubo.

**PROPRIEDADES DE POTÊNCIAS**

a) Toda a potência de base diferente de zero elevada a expoente par, é positiva.

- Ex. a)  $(+2)^4 = 16$
- c)  $2^4 = 16$
- b)  $(-2)^4 = -6$
- d)  $-2^4 = -16$

b) Toda potência de base diferente de zero elevada a expoente ímpar tem o sinal da base.

- Ex. a)  $(+2)^3 = 8$
- c)  $2^3 = 8$
- b)  $(-2)^3 = -8$
- d)  $-2^4 = -16$

c) Para multiplicarmos potência de mesma base, conservamos a base e somente os expoentes.

- Ex. a)  $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^5 = 2^{10} = 1024$
- a)  $(-3)^2 \cdot (-3)^5 = (-3)^7 = -2187$
- b)  $a^4 \cdot a^3 \cdot a^5 \cdot a = a^{13}$
- c)  $y^8 \cdot y^{-3} \cdot y \cdot y^{-5} = y^8 + (-3) + 1 + (-5)$
- d)  $B^n \cdot B^{n-1} \cdot B^{2-n} = B^n + (n-1) + (2-n)$   
 $= B^{n+1}$

**EXERCÍCIOS**

- a)  $3 \cdot 3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^3 =$
- b)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$
- c)  $x^5 \cdot x^3 \cdot x^{-2} \cdot x^{-4} =$
- d)  $A^{n-1} \cdot A^2 \cdot A^{2-2n} \cdot A^{2n} =$
- e)  $2^2 \cdot 2^{2x-1} \cdot 2^{-2x}$

4ª) Para dividirmos potências de mesma base, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

Exemplos:

- a)  $2^8 : 2^3 = 2^{8-3} = 2^5 = 32$
- b)  $(-5)^2 : (-5)^5 = (-5)^{2-5} = (-5)^{-3}$

- c)  $\left(\frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = \frac{1}{2}$   
 d)  $3^4 : 3^{-2} = 3^{4-(-2)} = 3^{4+2} = 3^6 = 729$   
 e)  $a^{-3} : a^{-2} = a^{-3-(-2)} = a^{-3+2} = a^{-1}$   
 f)  $x^4 : x^7 = x^{4-7} = x^{-3}$

Obs: Para dividirmos mais de duas potências de mesma base, conservamos a base e subtraímos os expoentes:

Exemplos:

- 1)  $2^3 : 2^2 : 2^5 = 2^{3-2-5} = 2^{-4}$   
 2)  $y^8 : y^{-3} : y : y^{-5} = y^{8+3-1-5} = y^5$   
 3)  $B^n : B^{n-1} ; B^{2-n} = B^{n-(n-1)-(2-n)} = B^{n-n+1-2+n} = B^{n-1}$

### EXERCÍCIOS - P

- 23)  $x^5 : x^3 : x^{-2} : x^{-4} =$   
 24)  $A^{n-1} : A^2 : A^{2-2n} : A^{2n} =$   
 25)  $2^2 : 2^{2x-1} : 2^{-2x} =$   
 26)  $3^2 : 3^4 : 3 : 3^6 : 3^3 =$   
 27)  $2^2 : 3^3 : 2 : 2^4 : 3^2 : 3 : 2^{-4} : 3^{-5} =$   
 28)  $(a^{-3} : a^2 : b^3) : (b^{-2} : a^4 : b^{-4}) =$

5ª) Para elevarmos uma potência a um expoente, conservamos a base e multiplicamos os expoentes.

Exemplos:

- 1)  $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$   
 2)  $(3^{-2})^{-5} = 3^{10}$   
 3)  $\left[(\sqrt{2})^2\right]^3 = (\sqrt{2})^6$   
 4)  $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$

Obs: cuidado com potência de ordem superior

Exemplos:

$$2^{3^4} = 2^{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 2^{81} \rightarrow \text{observe que } (2^3)^4 \neq 2^{3^4}$$

pois  $2^{12} \neq 2^{81}$

### EXERCÍCIOS - P1

- 1)  $2^{3^3} =$   
 2)  $(2^3)^2 =$   
 3)  $3^{1^2} =$   
 4)  $(3^1)^2 =$

6ª) Qualquer número diferente de zero elevado a zero é igual a unidade.

Exemplos:

- 1)  $2^0 = 1$   
 2)  $(-3)^0 = 1$   
 3)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^0 = 1$   
 4)  $(-x)^0 = 1$   
 5)  $b^0 = 1$   
 6)  $-5^0 = 1$  (cuidado!)

7ª) Todo número diferente de zero, elevado a um expoente negativo é igual a uma fração cujo numerador é a unidade e o denominador é o próprio número elevado ao expoente positivo.

Exemplos:

- a)  $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$   
 b)  $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$   
 c)  $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$   
 d)  $-5^{-2} = -\frac{1}{5^2} = -\frac{1}{25}$   
 e)  $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$   
 f)  $-3^{-1} = -\frac{1}{3^1} = -\frac{1}{3}$   
 g)  $\frac{1}{7^4} = 7^{-4}$   
 h)  $\frac{1}{6} = 6^{-1}$   
 i)  $\frac{1}{4^5} = 4^{-5}$

OBS: 1) Toda a vez que deslocamos uma potência do numerador de uma fração para o denominador, trocamos o sinal do expoente e vice-versa, como vimos nos exemplos anteriores.

2) Invertendo uma fração elevada a expoente negativo, este torna-se positivo.

Exemplos:

- a)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$   
 b)  $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} = (-3)^1 = -3$

8ª) Para elevarmos uma fração a um expoente, elevamos cada termo da fração ao expoente.

Exemplos:

- a)  $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$   
 b)  $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^3 = \frac{a^6}{b^9}$   
 c)  $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = -\frac{2^3}{5^3} = -\frac{8}{125}$   
 d)  $\left(-\frac{5}{4}\right)^{-4} = \left(-\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{4^4}{5^4} = \frac{256}{625}$   
 e)  $\left(\frac{2^{-3}}{3^2}\right)^{-2} = \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^{-2} = \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^2 = \frac{2^6}{3^4} = \frac{64}{81}$

9ª) Para elevarmos um produto a um expoente, elevamos cada fator do produto ao expoente.

Exemplos:

- 1)  $(2 \cdot 3 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 27 \cdot 125 = 27000$

$$2) (x \cdot y \cdot z)^2 = x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = x^2 y^2 z^2$$

$$3) (a+3 \cdot b^2 \cdot c)^2 = a^6 b^4 c^2$$

$$4) (2ab)^3 = 2^3 a^3 b^3 = 8a^3 b^3$$

$$5) (2^{-2} \cdot 3^{-1} \cdot 5^2)^2 = 2^{-4} \cdot 3^{-2} \cdot 5^4 = \frac{5^4}{2^4 \cdot 3^2} = \frac{625}{144}$$

NOTA: Potência semelhantes são aquelas que possuem os mesmo expoentes;

Exemplo:

$$a) 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot x^3 \cdot y^3 \text{ etc.}$$

10ª) Para multiplicarmos potências semelhantes, multiplicamos as bases e conservamos o expoente.

Exemplos:

$$a) 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 3 \cdot 5)^3 = (30)^3$$

$$b) x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = (x \cdot y \cdot z)^2 = (vxy)^2$$

$$c) (100)^2 = (2^2 \cdot 5^2)^2 = 2^4 \cdot 5^4$$

11ª) Para dividirmos potências semelhantes, dividimos as bases e conservamos o expoente.

Exemplos:

$$a) 4^6 : 2^6 = (4 : 2)^6 = 2^6 = 64$$

$$b) (100)^3 : (50)^3 = 2+3 = 8$$

12ª) Todo número elevado a um expoente fracionário é igual a um radical cujo índice é o denominador do expoente e cujo radicando é o número elevado ao numerador do expoente.

$\sqrt[a]{b}$ , onde  $a$  é o índice,  $b$ , dentro do radical é o radicando.

Exemplos:

$$a) 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$$

$$d) 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$$

$$b) 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$$

$$e) \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$c) 3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$$

$$f) \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$$

### EXERCÍCIOS - P

$$a) (-1)^3 - (-1)^7 =$$

$$b) -1^6 + 1^9 =$$

$$c) (-2)^2 + (-3)^2 =$$

$$d) 2^3 - (-1)^5 =$$

$$e) \frac{-1^3 + (-1)^4}{-1^2 + (-1)^6} =$$

$$f) \frac{1^5 - (-1)^9}{(-1)^6 + (-1)^3} =$$

$$g) \frac{2^6 \cdot 2 \cdot 2^{-2}}{2^7 \cdot 2^{-2} \cdot 2^{-3}} =$$

$$h) \frac{-1^3 + (-1)^4}{(-1)^5 - 1^8} =$$

$$i) \frac{x^4 \cdot x^5 \cdot x^{-3} \cdot x}{x^2 \cdot x^3 \cdot x^{-1}} =$$

$$j) \frac{2^{-1} + 3^{-11}}{5^{-1}} + (-7)^0 =$$

$$k) 2^4 \cdot 2^{-2} + 3^0 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^{-3} : 2^4 =$$

$$l) \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4^0 + 2^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 =$$

$$m) (2^3)^3 - (3^{-2})^{-2} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} =$$

$$n) \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + 3^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$o) \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} + 5^0 - 2^5 \cdot 2^{-4} - (2^2)^4 \right]^0 =$$

$$16) (3^{-2})(2^{-3}) + \left(-\frac{2}{3}\right)^0 + (2^{-1})^3 =$$

$$17) \left(\frac{1}{2}\right)^0 - 3^5 : 3^4 + 2 \cdot 2^2 =$$

$$18) \left\{ \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^0 \right]^2 \right\}^7 =$$

$$19) (2^2 \cdot 3^2 \cdot 5)^3 : (3 \cdot 2^3 \cdot 5^2)^2 =$$

$$20) \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \cdot \frac{3}{2} - \frac{2 \cdot 3^3}{2^3 \cdot 3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^0 =$$

$$21) \left[ \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} \right]^3 =$$

$$22) 3^{-1} + \frac{4^0}{2^{-2}} + 3 =$$

$$1) 2^6 \cdot 2^3 : 2^2 \cdot 2 \cdot 2^3 =$$

$$2) (3 \cdot 5)^{10} : (15^3)^3 =$$

$$25) \frac{2^7 \cdot 2^3 \cdot 2}{(16)^8 : (8)^8} =$$

$$26) \left( \frac{2^0 - 2^{-1}}{2^{-1} - 2} \right)^{-1} =$$

$$27) \frac{x^3}{(x^3)^2} =$$

28)  $10^{-3} =$

### POTÊNCIA DE EXPOENTE NATURAL

Dado um número real **a** e um número natural **n** > 1, chama-se potência enésima de **a**, e indica-se por **a<sup>n</sup>**, o produto de **n** fatores iguais a **a**.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots \cdot a}_{(n \text{ vezes})}$$

### CASOS PARTICULARES

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

$$a^1 = a$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

Calcule as potências:

a)  $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

b)  $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$

c)  $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

d)  $-2^3 = -2 \cdot 2 \cdot 2 = -8$

e)  $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$

f)  $-3^2 = -3 \cdot 3 = -9$

g)  $3^0 = 1$

g)  $0^0 =$  indeterminação

h)  $2,1^2 = (2,1) \cdot (2,1) = 4,41$

i)  $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

### POTÊNCIA DE BASE 10

As potências de 10 facilitam muito o cálculo de diversas expressões que surgiram na resolução de testes de física e química.

a) Para se elevar **10<sup>n</sup>** (**n** ∈ **N**), basta escrever-se **n** zeros a direita do número 1.

b) Para se elevar **10<sup>-n</sup>** (**n** ∈ **N**), basta escrever-se **n** zeros a esquerda do número 1, colocando-se a vírgula depois do primeiro zero que se escreveu.

### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

Calcule as potências:

a)  $10^3 = 1000$

b)  $10^5 = 100.000$

c)  $10^{-2} = 0,01$

d)  $10^{-4} = 0,0001$

### PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DAS POTÊNCIAS

#### Produto de potências de mesma base

Conserva-se a base e somam-se os expoentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

#### Divisão de potências de mesma base

Conserva-se a base e subtraem-se os expoentes.

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

#### Potência de um produto

Distribui-se o expoente para os fatores e multiplicam-se as potências assim obtidas.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

#### Potência de um quociente

Distribui-se o expoente para o dividendo e o divisor e dividem-se as potências assim obtidas.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

#### Potência de base fracionária e expoente negativo

Inverte-se a base e troca-se o sinal do expoente.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

## Potência de potência

Conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

## Potência de ordem superior

Resolve-se as potências de cima para baixo.

$$a^{m^n}$$

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

Desenvolva as potências:

a)  $2^3 \cdot 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10} = 1024$

b)  $3^{-7} \cdot 3^{12} = 3^{-7+12} = 3^5 = 243$

c)  $7^8 : 7^5 = 7^{8-5} = 7^3 = 343$

d)  $2^{-3} : 2^{-5} = 2^{-3-(-5)} = 2^{-3+5} = 2^2 = 4$

e)  $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$

f)  $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

g)  $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

h)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$

i)  $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$

j)  $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$

l)  $2^{3^2} = 2^9 = 512$

m)  $2^{2^3} = 2^8 = 256$

## EXERCÍCIOS EM AULA:

01. Calcule a expressão  $\frac{(a^3 \cdot b^2)^3}{(a^2 \cdot b^3)^2}$ .

02. O valor da expressão  $(0,2)^3 + (0,16)^2$  é:

03. Se  $a = 2^3$ ,  $b = a^2$  e  $c = 2^a$ , o valor da expressão  $2abc$  é:

04. O valor de  $\frac{10^{-2} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4}}{10^{-1} \cdot 10^{-6}}$  é:

05. Provar que  $2^n + 2^{n+1} = 3 \cdot 2^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

06. Provar que  $\frac{2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}}{2^{n+3}} = \frac{7}{8}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01.(VUNESP) Se  $x = 10^{-3}$ , então

$\frac{(0,1)(0,001)10^{-1}}{10(0,0001)}$  é igual a:

- a)  $100x$
- b)  $10x$
- c)  $x$
- d)  $x/10$
- e)  $x/100$

02.(MACK) O valor da expressão:

$\frac{2^{n+4} + 2^{n+2} + 2^{n-1}}{2^{n-2} + 2^{n-1}}$  é:

- a) 1
- b)  $2^{n-1}$
- c)  $3/83$
- d)  $82/3$
- e)  $n$

03.(MACK) Sendo  $2^x = b$ , então  $2^{-2+3x}$  vale:

- a)  $3b^2$
- b)  $b/3$
- c)  $b^3/4$
- d)  $4b$
- e)  $2b^2/3$

04.(MACK) A expressão

$\frac{(1/2)^{x+4} - 2^{-1} \cdot (1/2)^x}{2^{-x-4}}$ ,

quando simplificada é igual a:

- a)  $1/2$
- b)  $-8$
- c)  $1/8$
- d)  $3/2$
- e)  $-7$

05.(E.S.A) A diferença  $27^{0,333...} - 16^{0,75}$ , é igual a:

- a) 5
- b) 6
- c) -5
- d) -6
- e) 2

06. O matemático De Morgan, que viveu no séc. XIX, propôs o seguinte enigma à respeito de sua idade: "Eu tinha  $x$  anos no ano  $x^2$ ". Em que ano ele nasceu?

07.(UEL) A expressão  $4^{0,5(2^{0,5})^2}$ , é igual a:

- a)  $1/2$

b) 1

c)  $\sqrt{2}$

d) 2

e) 4

**08.(UBERABA)** A expressão  $(4\%)^{-1/2}$ , é um dos modos de indicar o número:

a) 0,02

b) 5

c) 6,25

d) 12,5

e) 25

**09.(UEL)** Se  $x = 2 \cdot 10^{-12}$ ,  $y = 50 \cdot 10^{-11}$  e  $z = 3 \cdot 10^{-10}$ , então :

a)  $x < y < z$

b)  $x < z < y$

c)  $y < x < z$

d)  $z < x < y$

e)  $z < y < x$

**10.(UEL)** Comparando-se os números  $10^{-49}$  ( $1^\circ$ ) e  $2 \cdot 10^{-50}$  ( $2^\circ$ ) pode-se afirmar que :

a) o  $1^\circ$  excede o  $2^\circ$  em  $8 \cdot 10^{-1}$

b) o  $1^\circ$  excede o  $2^\circ$  em  $2 \cdot 10^{-1}$

c) o  $1^\circ$  excede o  $2^\circ$  em  $8 \cdot 10^{-49}$

d) o  $1^\circ$  é 5 vezes o  $2^\circ$

e) o  $1^\circ$  excede o  $2^\circ$  em 5

### GABARITO :

01) b

02) d

03) c

04) e

05) c

06) 1806

07) c

08) b

09) b

10) d

## 3 - EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

A Álgebra é a parte da matemática onde se empregam outros símbolos além dos algarismos. Estes símbolos, quando ligados por sinais de operação, são denominados de expressão algébrica.

Dada uma expressão algébrica qualquer, fatorar a mesma é transformá-la em produto, utilizando, para tanto, as propriedades válidas para as operações entre expressões algébricas.

A propriedade distributiva será muito usada sob a denominação de colocar em evidência.

### FATOR COMUM

Vamos fatorar a expressão algébrica.

$$ax + bx = x \cdot (a + b)$$

O  $x$  é o fator comum que foi colocado em evidência.

### AGRUPAMENTO

Vamos fatorar a expressão algébrica.

$$ax + bx + ay + by = x \cdot (a + b) + y \cdot (a + b) =$$

$$= (a + b) (x + y)$$

Foi aplicado duas vezes a fatoração, utilizando o processo fator comum.

### EXEMPLOS RESOLVIDOS

Fatore as seguintes expressões algébricas.

Exemplo 1:

$$3x + 3y = 3 \cdot (x + y), \text{ onde } 3 \text{ é o fator comum.}$$

Exemplo 2:

$$8ax^3 - 4a^2x^2 = 4ax^2 \cdot (2x - a), \text{ onde } 4ax^2 \text{ é o fator comum.}$$

Exemplo 3:

$$2x^7 + 3x^4 = x^4 \cdot (2x^3 + 3), \text{ onde } x^4 \text{ é o fator comum.}$$

Exemplo 4:

$$5a^2x - 5a^2m - 10a^2 = 5a^2 \cdot (x - m - 2)$$

Exemplo 5:

$$6x + 6y + ax + ay = 6 \cdot (x + y) + a \cdot (x + y) = (x + y)(6 + a)$$

Exemplo 7:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = x^2 \cdot (x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(x^2 + 1)$$

Exemplo 8:

$$x^2 - 36 = x^2 - 6^2 = (x + 6)(x - 6)$$

Exemplo 9:

$$1 - m^2 = (1 - m)(1 + m)$$

Exemplo 10:

$$25x^4 - y^6 = (5x^2 + y^3)(5x^2 - y^3)$$

Exemplo 11:

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$$

Exemplo 12:

$$x^2 + 20x + 100 = (x + 10)^2$$

Exemplo 13:

$$y^6 - 2y^3 + 1 = (y^3 - 1)^2$$

Exemplo 14:

$$a^4 - 22a^2 + 121 = (a^2 - 11)^2$$

### EXERCÍCIOS - I

a)  $4x^3y + 3x^2y^2 - 4xy^3$ , para  $x = 2$  e  $y = -2$

b)  $2a^4b^3 + 3a^3b - 2a^3 + b^2 + 4a^2b^5$ , para  $a = 1$  e  $b = -1$

c)  $4x^3y^2 - x^2y + 5x^4y^3 - 2x^2y^2$ , para  $x = y = -1$

d)  $y^4 - 3xy^3 + 7x^2y^2 - 4x^3y$ , para  $x = -1/2$  e  $y = -2$

e) Sendo  $P(x) = x^2 - 5x + 6$ , achar  $P(i)$

f)  $\frac{a}{4^x} + \frac{b^x}{2} + a^0$ , para  $a = -1$ ,  $b = 3$  e  $x = 0$

## CLASSIFICAÇÃO DAS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

### Racionais

Quando não contiverem letras sob o sinal de radical ou elevadas a expoente fracionário.

### Inteiras

Quando não contiverem letras em denominador ou elevadas a expoente negativo.

Exemplos

- 1)  $3x^2 - 5xy - 8$
- 2)  $\sqrt{2}x - x^3y - 5$
- 3)  $3^{1/2}x^4 - 2x + 1$
- 4)  $3^{-2}x^4y - 2z + 4t$

### Fracionárias

Quando contiverem letras em denominador ou elevadas a expoente negativo.

Exemplos:

- a)  $3x^{-3} + 3xy + 5x$
- b)  $\frac{3x}{a} + \frac{5y}{b} + 3x$

### Irracionais

Quando contiverem letras sob o sinal de radical ou elevadas a expoente fracionário.

Exemplos:

- a)  $3\sqrt{x} - 2z - 3y$
- b)  $4x^{1/3} + 5xy - 4$

## EXERCÍCIOS - II

- a)  $x\sqrt{2} - 3x + 1$
- b)  $2x^{3/4} - \frac{2}{x} + 7$
- c)  $x^5 - \frac{4}{x^2} + y$
- d)  $3^{-2}x - 4y + 5z$
- e)  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 20$

## MONÔMIO

É a expressão algébrica onde não aparecem operações de adição e subtração. É a expressão algébrica de um só termo.

Exemplos:

$$x^2y ; \frac{x}{2} ; -5xyzt^2 ; \frac{3y}{3x} ; xy^2z^3 ; \dots$$

### Parte literal de um monômio

São as letras

### Coefficiente de um monômio

É o número que antecede as letras

Exemplo.

- a)  $5x^2yz \rightarrow$  coeficiente = 5 e parte literal =  $x^2yz$
- b)  $x^4y^3t^2 \rightarrow$  coeficiente = 1 e parte literal =  $x^4y^3t^2$
- c)  $-x^3m^5n^4 \rightarrow$  coeficiente = -1 e parte literal =  $-x^3m^5n^4$
- d)  $\frac{2}{3}a^4b^5c^2 \rightarrow$  coeficiente =  $\frac{2}{3}$  e parte literal =  $a^4b^5c^2$
- e)  $\frac{m^3n^2p^4}{5}$  coeficiente =  $\frac{1}{5}$  e parte literal =  $m^3n^2p^4$

### Grau de um monômio

É a soma dos expoentes de sua parte literal.

Exemplos:

- 1)  $5x^3y^4z^2 \rightarrow 9^\circ$  grau
- 2)  $-3a^4bc^2 \rightarrow 7^\circ$  grau
- 3)  $2^5x^2y^3 \rightarrow 5^\circ$  grau
- 4)  $xyz \rightarrow 3^\circ$  grau

### Monômio semelhantes ou termos semelhantes

São termos que possuem igual parte literal, podendo diferir nos coeficientes.

Exemplos:

- a)  $2x^2y$  e  $3x^2y \rightarrow$  são semelhantes
- b)  $3a^2b$  e  $5a^2b \rightarrow$  são semelhantes
- c)  $7x^2y$  e  $11xy^2 \rightarrow$  não são semelhantes

## POLINÔMIOS

É a soma algébrica de monômios.

Exemplos:

- a)  $5xy - 3xy \rightarrow$  Binômio (dois termos)
- b)  $3x^3y - 4ab + 3x \rightarrow$  Trinômio (três termos)
- c)  $4xy + 3ab - 4mn + 8 \rightarrow$  Polinômio
- d)  $x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 5 \rightarrow$  Polinômio

### Grau de um polinômio

É o grau do seu monômio de maior grau.

Exemplos:

- 1)  $5x^3yz^4 - 3x^2y^3z + 8x^4yz^2 \rightarrow 8^\circ$  grau
- 2)  $3x^2 - 4x^3 + 8x^4 - x^6 + 3x^5 \rightarrow 6^\circ$  grau
- 3)  $7x - 5 \rightarrow 1^\circ$  grau

### Ordenação de polinômios

Crescente – Do menor expoente para o maior, em relação a uma certa letra.

Ex.  $3xyt + xyt^2 - 3xyt^4 + 4x^3y^2t^6$   
(ordenado crescentemente em relação a "t")

Decrescente – Do maior expoente para o menor, em relação a uma certa letra.

Ex.  $5yt^3x^6 + 3tx^4 - t^2yx^3 + 7y^2x^2 - 6x$

(ordenado decrescentemente em relação a "x")

**Polinômio completo** – Quando aparecem todas as potências consecutivas de uma certa letra, desde o expoente "zero" até o de grau mais elevado. Em caso contrário, dizemos que o polinômio está **INCOMPLETO**.

Exemplos:

- 1)  $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x + 8 \rightarrow$  completo
- 2)  $5 - 3x + 7x^2 - 4x^3 - 8x^4 \rightarrow$  incompleto
- 3)  $3x - 4x^2 + 7x^3 - 8x^4 \rightarrow$  incompleto
- 4)  $9x^4 - 3x^2 + 2x - 7 \rightarrow$  incompleto

**OBS:** Para completarmos um polinômio, escrevemos a potência que está faltando, precedida do coeficiente "zero".

Exemplo:

- $8x^4 - 2x^2 + 3x \rightarrow$  incompleto  
 $8x^4 + 0x^3 - 2x^2 - 3x + 0 \rightarrow$  completo

### OPERAÇÕES COM EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

**Adição** (Redução de termos semelhantes)

Conservamos a parte semelhante e operamos com os coeficientes.

Exemplos:

- 1)  $3ab - 5ab + 7ab + ab - 2ab =$   
 $(+) \rightarrow 3ab + 7ab + ab = 11ab$   
 $(-) \rightarrow -5ab - 2ab = -7ab \rightarrow (4ab)$
- 2)  $5x^2y + 6x^2y - 3x^2y - x^2y = 7x^2y$
- 3)  $3a^2x - 5x^2 + 7x^3 - 5a^2x + 3x^2 + x^3 - 8 =$   
 $= -2a^2x - 2x^2 + 8x^3 - 8$

### EXERCÍCIOS - III

- 1) Sendo  $A = x^4 - 3x^3 + x^2 - 7$ ,  
 $B = 3x^4 - 2x^2 + x - 3$  e  
 $C = -2x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 2x$ , calcular

- a)  $A + B - C$       b)  $B - A + C$

2) Reduzindo os termos semelhantes de  $(3a^2x - 5x^2 + 7x^3) + (-5a^2x + 3x^2 + x^3 - 8)$ , obtemos.....

3) Reduzindo os termos semelhantes da expressão algébrica  $8xy - 4ab + 2ab - x - 7xy + 2ab - xy + x + 1$ , encontramos.....

### Multiplicação de Monômio por Monômio

Multiplicamos, respectivamente, os coeficientes e as partes literais.

Exemplo:  $3x^2 \cdot 4x^6 = 12x^8$

### EXERCÍCIOS - IV

- 1)  $-2xy \cdot 5x^3y^7 =$
- 2)  $(-4a^3x^2y^8)(-6b^5x^4y^{10}) =$
- 3)  $(5x^3y^2z^4)(8t^3yz^2) =$
- 4)  $(-3a^3x^2)(-6a^2x)(5a) =$

- 5)  $(8a^2x^3)(1/2a^2x^7) =$
- 6)  $(7x^3t^4)(1/3xt) =$
- 7)  $(-5a^2b^3)(a^4b^2) =$
- 8)  $(-x^4y^2)(-3xy^3) =$

### Multiplicação de monômio por Polinômio

Multiplicamos o monômio por cada termo do polinômio.

Exemplo:

$$(3x^3 - 2x^2 + x - 3)(-4x^2) = -12x^5 + 8x^4 - 4x^3 + 12x^2$$

### EXERCÍCIOS - V

- a)  $(5a^3b - 4a^2b^5 - ab)(-2a^4b^6) =$
- b)  $(-3x + 2 + yt^3)(-xy^2t^4 + 3x^2yt - 5x^3y^2t^4) =$
- c)  $(2x^4 - 3x^2 + 2x - 1)(-x^3) =$
- d)  $(4x^2y - 3xy + 5xy^2)(-xy) =$
- e)  $(3a^2x^3y - 4bx^2y^2 + 5cxy^3)(-2dx^4y^5) =$

### Multiplicação de Polinômio por Polinômio

Multiplicamos cada termo de um dos polinômios por todos os termos do outro. A seguir, faz-se a redução dos termos semelhantes.

Exemplos:  $(3x^3 - 2x^2 + 3x - 10)(2x^2 - 3x + 2) =$   
 $= 6x^5 - 9x^4 + 6x^3 - 4x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 6x^3 - 9x^2 + 6x$   
 $- 2x^2 + 3x - 2 =$   
 $= 6x^5 - 13x^4 + 18x^3 - 15x^2 + 9x - 2$

### EXERCÍCIOS - VI

- a)  $(5a^2b + 3ab^2 - 3)(6ab^2 - 3a^2b + a^3) =$
- b)  $(2x^3y - 3x^2y^2 + xy^3)(3x^2y^2 + xy - 3) =$
- c)  $(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 3x - 4) =$
- d)  $(2x^4 - 3x^2 + x)(x^2 - x) =$
- e)  $(x^3 + 2x)(x^4 - 2x^2 - x + 1) =$

### Divisão de Monômio por Monômio

Dividem-se, respectivamente, os coeficientes e as partes literais.

Exemplo:  $6a^3b^4 + 2ab^2 = 3a^2b^2$

### EXERCÍCIOS - VII

- 1)  $-15x^6y^7 + 5xy^2 =$
- 2)  $\frac{18a^6b^5c^4}{6a^3b^2c} =$
- 3)  $5x^2y^7 + (-x^7y^3) =$
- 4)  $10x^2y^4z^6 + 5xy^2 =$
- 5)  $24x^7y^5 + (-12x^5y^2z^4) =$
- 6)  $2x^5y^4 : 7x^3y =$

### Divisão de Polinômio por Monômio

Divide-se cada termo do polinômio pelo monômio.

Exemplo:  $(12x^5y^4 + 6x^6y^3 - 8x^4y^7) : (-2x^2y^3) = 6x^3y - 3x^4 + 4x^2y^4$

### EXERCÍCIOS - VIII

- a)  $(-15a^3b^4 + 30a^3b^2 - 45a^4b^5) : (-3ab) =$   
b)  $(8x^3y^4z^5 - 16x^3y^3 + 24x^5y^4) : (-4x^2y^3) =$   
c)  $(-10c^5d^4 - 50c^6d^7 - 5c^2d^3) : (5c^2d^3) =$

### Polinômio por Polinômio (com uma variável)

1º) o polinômio do dividendo deve estar ordenado decrescentemente e completo. O polinômio do divisor basta estar ordenado decrescentemente.

2º) Divide-se o 1º termo do dividendo pelo 1º termo do divisor. O resultado é o 1º termo do quociente.

3º) Multiplicamos o 1º termo do quociente por cada termo do divisor, escrevendo o resultado no dividendo, com o sinal trocado, em baixo da potência semelhante.

4º) Somamos e começamos novamente no item 1.

5º) A divisão é feita até que o grau do resto fique menor que o grau do divisor.

Exemplo:

$$\begin{array}{r} (2x^2 + 8x + 5) \text{ Dividendo} \\ (x - 2) \text{ Divisor} \end{array} =$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 + 8x + 5 & x - 2 \\ -2x^2 + 4x & \hline 12x + 5 & \\ -12x + 24 & \\ \hline 29 & \end{array}$$

Quociente:  $2x + 12$

Resto: 29

b)  $(-1 + x^3) + (1 + x)$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0x^2 = 0x - 1 & x - 2 \\ -x^3 - x^2 & \hline -x^2 + 0x - 1 & \\ +x^2 + x & \\ \hline x - 1 & \\ -x - 1 & \\ \hline -2 & \end{array}$$

Quociente:  $x^2 - x + 1$

Resto: -2

### EXERCÍCIOS - IX

- 1)  $(6x^2 + 4x^3 - x + 1) + (3x - 1 + x^2) =$   
2)  $(3x^4 - 15x^2 + x) : (4x - 3 + x^2) =$   
3)  $(3x^5 - x + 4) : (1 - x^2) =$   
4)  $(x^5 - 1) : (x - 1) =$   
5)  $(2y^2 + 3 + 4y^5 - 2y) : (2 - 3y + y^3) =$

## 4 - PRODUTOS NOTÁVEIS

Há certos produtos que ocorrem freqüentemente no cálculo algébrico e que são chamados produtos notáveis.

### 1. QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Exemplo:

a)  $(5 + x)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + x^2 = 25 + 10x + x^2$

b)  $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot (3y) + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

### 2. QUADRADO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Exemplos:

a)  $(3 - x)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + x^2 = 9 - 6x + x^2$

b)  $(2x - 3y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot (3y) + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

### 3. PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

### 4. SOMA DE CUBOS

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

### 5. DIFERENÇA DE CUBOS

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

PROFESSOR :

01) Desenvolva os produtos notáveis :

- a)  $(3x + 5)^2 =$   
 b)  $(5x^3 - 2y^4)^2 =$   
 c)  $(x^4 - 1)^8 =$   
 d)  $(x^3 - y^3)/(x^2 + xy + y^2) =$

## 5 - FATORAÇÃO

Fatorar um polinômio é escrevê-lo sob a forma de um produto indicado.

Fator comum dos termos de um polinômio é o monômio cujo coeficiente numérico é o máximo divisor comum dos coeficientes dos termos do polinômio e cuja parte literal é formada pelas letras comuns com os menores expoentes.

Apresentando um fator comum, o polinômio pode ser escrito como o produto de dois fatores: o 1º é o fator comum e o 2º é o obtido dividindo-se o polinômio original pelo fator comum.

### 1º caso: Fator comum

Colocamos em evidência o mdc dos coeficientes e as letras constantes de todos os termos elevados ao menor expoente.

#### Exemplos:

$$36a^4x^5 + 24a^5x^4 - 42a^3x^7 = 6a^3x^4(6ax + 4a^2 - 7x^3)$$

$$\begin{array}{l} 36 = 2^2 \cdot 3^2 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^2 \\ 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \end{array} \rightarrow 2 \cdot 3 = 6$$

### EXERCÍCIOS - 1º caso

- a)  $2^a - 6b + 10c$   
 b)  $3x^4 + 9x^2 - 6x =$   
 c)  $54a^2b^6 + 108a^5b^8 =$   
 d)  $4x^2 - 6xy =$   
 e)  $14a^3b^4 - 35a^2b^5 + 133ab^6$

### 2º caso: Agrupamento

$$\text{Ex. } \frac{ab+ac}{a(b+c)} + \frac{bd+cd}{d(b+c)} = a(b+c) = (b+c)(a+d)$$

### EXERCÍCIOS - 2º caso

- 1)  $x^3 + x^2 + x + 1 =$   
 2)  $x^3 - x^2 + 5x - 5 =$   
 3)  $4x^3 - 8x^2 + 3x - 6 =$   
 4)  $6x^3 - 12x^2 - x + 2 =$   
 5)  $bx - ax + ay - by =$   
 6)  $4x^2 - 2x + 2y - 4xy =$

**3º caso:** Diferença de dois quadrados perfeitos. É igual ao produto da soma pela diferença.

$$\text{Ex. } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

### EXERCÍCIOS - 3º caso

- 1)  $9a^2 - 4b^2 =$   
 2)  $a^2 - 16 =$   
 3)  $x^2 - 1 =$   
 4)  $1 - a^2 =$   
 5)  $25 - x^4y^4 =$   
 6)  $x^6y^8 - 4a^4b^2 =$   
 7)  $36x^4y^2 - a^{10} =$   
 8)  $49a^8b^{10} - 64x^6y^{12} =$

### 4º caso: Trinômio quadrado perfeito.

É igual ao quadrado de uma soma ou de uma diferença.

$$\text{Ex. a) } a^2 + 4ab + 4b^2$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \sqrt{a^2} = a & & \sqrt{4b^2} = 2b \\ & 2 \cdot a \cdot 2b = 4ab & \end{array}$$

$$\text{Resp: } (a + 2b)^2$$

$$\text{b) } x^2 - 6xy + 9y^2$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \sqrt{x^2} = x & & \sqrt{9y^2} = 3y \\ & -2 \cdot x \cdot 3y = -6xy & \end{array}$$

$$\text{Resp: } (x - 3y)^2$$

### EXERCÍCIOS - 4º caso

$$9a^4 - 24a^2b^3 + 16b^6 =$$

$$25x^8 + 20x^9 + 4x^{10} =$$

$$9x^2 + 12x + 4 =$$

$$m^6 - 8m^3n^6 + 16n^{12} =$$

$$9x^2/4 + 15xy + 25y^2 =$$

$$4a^6b^8 - 20a^3b^4c^2d^5 + 25c^4d^{10} =$$

### 5º caso: Trinômio de 2º grau

$$x^2 + Sx + P = (x + a)(x + b)$$

$$S = a + b \quad a = \dots\dots\dots$$

$$P = a \cdot b \quad b = \dots\dots\dots$$

Exemplo:

$$\text{a) } x^2 + 8x + 12$$

$$a + b = 8 \quad a = 6$$

$$a \cdot b = 12 \quad b = 2$$

$$\text{Resp: } (x + 6)(x + 2)$$

$$\text{b) } x^2 - 7x + 12$$

$$a + b = -7 \quad a = -3$$

$$a \cdot b = 12 \quad b = -4$$

$$\text{Resp: } (x - 3)(x - 4)$$

### EXERCÍCIOS - 5º caso

$$x^2 - 5x + 6 =$$

$$x^2 - 10x + 9 =$$

$$6) x^2 - 29x + 100 =$$

$$7) x^2 - 2x - 15 =$$

$$\begin{aligned}x^2 + x - 12 &= \\x^2 + 6x + 5 &= \\x^2 - 6x + 8 &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}8) x^2 + 3x - 28 &= \\9) -x^2 - 5x + 14 &= \\10) -x^2 - 5x + 24 &= \end{aligned}$$

**PROFESSOR :**

01) Fatorar :

a)  $ax + by + ay + bx =$

b)  $2x^2 + (6 + a)x + 3a =$

**EXERCÍCIOS PROPOSTOS**

01) O resultado de  $21023^2 - 21022^2$  é :

- a) 1
- b) um número primo
- c) um número par
- d) um quadrado perfeito
- e) n.d.a

02) (ITA) Racionalize a fração  $\frac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$

- a)  $\frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}}{-2}$
- b)  $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$
- c)  $\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$
- d)  $\frac{\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} - 2}{6}$
- e) n.d.a

03) (VUNESP) Determine todos os números reais a,  $a \neq 0$ , cujo inverso  $a^{-1}$  pode ser expresso pelo polinômio  $-2 + a^2 + 2a^3$ .

04) (FUVEST) Se  $x + \frac{1}{x} = 3$ , calcule  $x^2 + \frac{1}{x^2}$ .

05) Na fatoração completa de  $m^8 - 1$ , encontramos quantos fatores ?

- 1) 2
- 2) 4
- 3) 6
- 4) 8
- 5) n.d.a

06) (FUVEST) A diferença entre o cubo da soma de dois números inteiros e a soma de seus cubos pode ser :

- a) 4
- b) 5
- c) 6
- d) 7
- e) 8

07) Simplifique a expressão:

$$2 + \sqrt{2 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}} \text{ com } x > 0 \text{ e } y > 0.$$

08) A expressão equivalente ao radical  $\sqrt{a^3 + 8a^2 + 16a}$ , sendo a um número real positivo, é:

- a)  $a + 4\sqrt{a}$
- b)  $4 + a\sqrt{a}$
- c)  $(a+4)\sqrt{a}$
- d)  $(a+2)\sqrt{a}$
- e)  $a + 2\sqrt{a}$

09) Das igualdades abaixo, a única verdadeira para todo número real a, é:

- a)  $\sqrt{a^2 + 16} = a + 4$
- b)  $16 - a^2 = (4 - a).(4 + a)$
- c)  $(a - 4)^2 = a^2 - 16$
- d)  $(a + 4)^2 = (a + 4).(a - 4)$
- e)  $(4a)^2 = 4a^2$

10) Calcule  $a + \frac{1}{a}$ , sabendo que

$$\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} = 3.$$

11) (UFAL) A expressão  $\sqrt{10 + \sqrt{10}} \cdot \sqrt{10 - \sqrt{10}}$  é igual a:

- a) 0
- b)  $\sqrt{10}$
- c)  $10 - \sqrt{10}$
- d)  $3\sqrt{10}$
- e) 90

12) (CEFET-MG) A expressão  $\frac{x^3 - x^2 - a^2x + a^2}{(x + a)(x - 1)}$  é igual a:

- a)  $a - x$
- b)  $x + a$
- c)  $x - 1$
- d)  $x + 1$
- e)  $x - a$

13) Simplifique a expressão  $\sqrt{\frac{a^2b + ab^2}{a + b}}$

- a)  $\sqrt{\frac{a^2b}{a + b}}$
- b)  $\sqrt{a \cdot b}$
- c)  $\sqrt{a^2 \cdot b^2}$
- d) 1
- e) n.d.a

14) A fração  $\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$ , quando  $a = 93$  e

$b = 92$ , é igual a :

- a) 0
- b) 1
- c) 185
- d)  $93^2 - 92^2$
- e)  $185/2$

15) (VUNESP) se  $x > y > 0$ , simplifique a expressão

$$: -x + \sqrt{xy\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right)}$$

- a) -x
- b) -y
- c) x - y
- d) x + y
- e) n.d.a

**GABARITO :**

- |        |       |              |
|--------|-------|--------------|
| 01) e  | 02) e | 03) -1/2 e 1 |
| 04) 07 | 05) b | 06) c        |
| 07) b  | 08) c | 09) b        |
| 10) 07 | 11) d | 12) e        |
| 13) d  | 14) b | 15) b        |

## 6 - RADICAIS

**DEFINIÇÃO:**

Denomina-se raiz de índice  $n$  ( ou raiz ene-ésima ) de  $a$ , ao número que, elevado à potência  $n$ , reproduz  $a$ .

Representa-se:

$$\sqrt[n]{a} \begin{cases} n = \text{índice de raiz} \\ a = \text{radicando} \\ \sqrt{\quad} = \text{radical} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a} \text{ é o número real } x \text{ tal que } x^n = a$$

**Exemplos:**

$$\begin{aligned} \sqrt{9} &= 3 && \text{pois } 3^2 = 9 \\ \sqrt[3]{27} &= 3 && \text{pois } 3^3 = 27 \\ \sqrt[3]{-8} &= -2 && \text{pois } (-2)^3 = -8 \\ \sqrt[4]{16} &= 2 && \text{pois } 2^4 = 16 \end{aligned}$$

**Atenção !!!**

$$\sqrt{16} = 4 \text{ e não } \sqrt{16} = \pm 4.$$

A definição, para o caso de índice **n par**, exige radicando **a** não negativo e resultado **x** não negativo. Não estamos procurando todos os números reais cujos quadrados resultem em 16.

## PROPRIEDADES OPERATÓRIA DOS RADICAIS

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

Exemplo:

$$\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[6:2]{2^{4:2}} = \sqrt[3]{2^2}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Exemplo:

$$\sqrt[3]{2^1} \cdot \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{2^1 \cdot 2^2} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Exemplo:

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplo:

$$(\sqrt[3]{3})^2 = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Exemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[3 \cdot 4]{2} = \sqrt[12]{2}$$

$$\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[m]{b^q} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m \cdot p} \cdot b^{n \cdot q}}$$

Exemplo :  $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 5^3}$

$$\frac{a}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b}}$$

Com  $a > 0, n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{Z}$ .

Exemplos:

a)  $25^{1/2} = \sqrt{25} = 5$

b)  $16^{0,25} = 16^{1/4} = \sqrt[4]{16} = 2$

**EXERCÍCIOS EM AULA:**

01. O valor da expressão:  $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}}$  é :

02. O valor da expressão:  $\sqrt{98} - \sqrt{32} - \sqrt{2}$  é :

03. O valor de  $\sqrt[5]{0,00032}$  é:

04. O número  $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{5\sqrt{2}}}$  é igual a:

05. Simplificar a expressão:  $\sqrt{\frac{17}{58}} \cdot \sqrt{\frac{29}{34}}$ .

06.(FUVEST) Determine o valor da expressão:

$$\sqrt[3]{\frac{2^{28} + 2^{30}}{10}}$$

**Racionalização**

Racionalizar um denominador irracional é fazer com que não tenha radical nem expoente fracionário no denominador.

**a) O denominador é um radical Quadrático**

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b}$$

Obs:  $\sqrt{b}$  chama-se fator racionalizante.

Exemplos:

01. Racionalize :

a)  $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

b)  $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

**b) O denominador é uma raiz de índice qualquer**

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

**Obs:** Neste caso, o fator racionalizante é um radical de mesmo índice, mas o radicando conterá o fator b elevado a um expoente tal que seja igual à diferença entre o índice do radical e o primitivo expoente do radicando.

Então:  $\sqrt[n]{b^{n-m}}$  é o fator racionalizante.

Exemplos:

Racionalize :

a)  $\frac{5}{\sqrt[7]{2^4}} = \frac{5 \cdot \sqrt[7]{2^3}}{2}$

b)  $\frac{2}{\sqrt[4]{3}} = \frac{2\sqrt[4]{3^3}}{3}$

**c) O denominador é soma ou diferença de dois fatores quadráticos**

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} \cdot \frac{(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \cdot \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$$

**Obs:** Neste caso, multiplica o numerador e o denominador pela expressão conjugada do denominador, lembrando que a expressão conjugada de  $a + b$  é  $a - b$ .

Exemplo:

$$\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2} = 3(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

**EXERCÍCIOS EM AULA**

Racionalize as expressões:

a)  $\frac{3}{\sqrt{2}}$

b)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

c)  $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

d)  $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$

**EXERCÍCIOS PROPOSTOS**

**01.(C.CHAGAS)** O número  $\sqrt{2352}$  corresponde a :

- a)  $4\sqrt{7}$
- b)  $4\sqrt{21}$
- c)  $28\sqrt{3}$
- d)  $28\sqrt{21}$
- e) n.d.a

**02.**  $\left(\frac{\sqrt[3]{-8}}{a}\right)^{-1}$  pode ser escrito como :

- a)  $a/2$
- b)  $2/a$
- c)  $-2/a$
- d)  $-a/2$
- e) n.d.a

**03.**  $\sqrt{90 + \sqrt{90 + \sqrt{90 + \sqrt{100}}}}$  é igual a :

- 04)  $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}}}$  equívale a :
- a)  $\sqrt{24}$
- b)  $\sqrt{2916}$
- c)  $\sqrt[4]{24}$
- d)  $\sqrt{192}$
- e) n.d.a

**05.** Se os números x, y e z são tais que  $x^2 = 9$ ,

$y = \sqrt{9}$  e  $z = \sqrt[3]{-27}$  então :

- a)  $x = 3, y = 3$  e  $z = -3$
- b)  $x = \pm 3, y = \pm 3$  e  $z = -3$
- c)  $x = \pm 3, y = \pm 3$  e  $z \notin \mathbb{R}$
- d)  $x = \pm 3, y = 3$  e  $z \notin \mathbb{R}$
- e) n.d.a

**06.** O valor de  $\sqrt[6]{0,000064}$  é :

- a) 4
- b) 0,4
- c) 2
- d) 0,2
- e) 0,02

**07.** A expressão  $\sqrt{8} + 2\sqrt{50} - \sqrt{18} + \sqrt{242}$  é igual a :

- a)  $\sqrt{528}$
- b)  $\sqrt{800}$

c)  $\sqrt{680}$

d)  $\sqrt{980}$

e) n.d.a

**08.** O número  $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{3\sqrt{5}}}$  é igual a :

- a)  $\sqrt[24]{2880}$
- b)  $\sqrt[24]{30}$
- c)  $\sqrt[9]{30}$
- d)  $\sqrt[12]{1440}$
- e) n.d.a

**09.** O valor da expressão

$\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2}$  é :

- a)  $\sqrt{20} - 4$
- b)  $2\sqrt{5}$
- c) 0
- d) 1
- e) 4

**10.(MACK)** A expressão  $\frac{\sqrt{50} - \sqrt{8}}{\sqrt{2}}$  simplificada

resulta :

- a)  $\sqrt{21}$
- b) 42
- c) 3
- d) 18
- e) n.d.a

**11.(FUVEST)** Qual é o valor da expressão :

$\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} + \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$  ?

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) 4

**12.(FGV)** A expressão

$E = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$  tem como valor :

- a) 1
- b) 2
- c) 5
- d)  $\sqrt{6}$
- e)  $\sqrt{3}$

**13.** A expressão  $\frac{x^{1/2} + y^{1/2}}{(xy)^{1/2}}$  vale :

- a)  $\frac{x + 2\sqrt{xy} + y}{xy}$
- b)  $\frac{x + 2\sqrt{xy} + y}{xy(x + y)}$

c)  $\frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{xy}$

d)  $\frac{x + y}{\sqrt{x} + y}$

e) n.d.a

14.  $\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$  é igual a :

a)  $\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt[3]{4}$

b)  $\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt[3]{2}$

c)  $\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt[3]{2}$

d)  $\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt[3]{4}$

e) n.d.a

15. Racionalizando a expressão :

$\frac{\sqrt{8} + \sqrt{6}}{\sqrt{2}}$  obtemos :

a)  $3\sqrt{2}$

b)  $2 + \sqrt{3}$

c)  $2\sqrt{3}$

d)  $2\sqrt{6}$

e) n.d.a

**GABARITO :**

- |       |       |        |
|-------|-------|--------|
| 01) c | 02) d | 03) 10 |
| 04) c | 05) a | 06) d  |
| 07) b | 08) a | 09) a  |
| 10) c | 11) e | 12) d  |
| 13) c | 14) d | 15) b  |

## 7 - EQUAÇÕES DO 1º GRAU

**DEFINIÇÃO:**

Equação do 1º grau, em  $\mathfrak{R}$ , na incógnita  $X$ , é toda igualdade do tipo:

$$a \cdot x + b = 0$$

Onde  $a \in \mathfrak{R}^*$  e  $b \in \mathfrak{R}$ .

**Exemplos:**

b)  $3x - 12 = 0$

b)  $5(x + 1) = 0$

**RESOLUÇÃO:**

Resolver uma equação é determinar sua raiz. Chama-se raiz ou solução da equação, o

número que substituído no lugar de  $x$ , transforma a equação numa igualdade numérica.

**Exemplos:**

a)  $x + 2 = 7 \therefore x = 7 - 2 \Rightarrow x = 5$

b)  $2x = 8 \therefore x = 8/2 \Rightarrow x = 4$

c)  $\frac{x}{3} = 5 \therefore x = 3 \cdot 5 \Rightarrow x = 15$

## 8 - SISTEMA DE EQUAÇÃO DO 1º GRAU

**DEFINIÇÃO:**

Sistema de equação do 1º grau é um conjunto de duas ou mais equações em que o valor de  $X$  é a unidade (1).

**RESOLUÇÃO:**

Resolver um sistema de equação do 1º grau consiste em encontrar uma solução que satisfaça, todas as equações, simultaneamente.

**MÉTODO DA ADIÇÃO**

Consiste em multiplicar ( por números quaisquer não todos nulos) uma das equações, ou ambas, de maneira que quando somadas obtenha-se uma nova equação, onde não figure uma das incógnitas; para tal é necessário que os coeficientes da incógnita que se deseja eliminar sejam simétricos.

**Exemplo:**

Resolver o sistema: 
$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

**MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO**

Isola-se uma das incógnitas em qualquer das equações e substitui-se na outra equação, acha-se o valor da outra incógnita, e volta-se com este à equação onde isolou a 1ª incógnita.

**Exemplo:**

Resolver o sistema: 
$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

**MÉTODO DA COMPARAÇÃO**

Determina-se o valor de uma das incógnitas em ambas as equações e igualam-se os resultados obtidos recaindo-se então numa equação do 1º grau a uma variável.

**Exemplo:**

Resolver o sistema: 
$$\begin{cases} 2x + y = 14 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

### EXERCÍCIOS EM AULA :

01. Resolver as equações :

- a)  $2x + x/6 = 3x$
- b)  $2x + 2x/3 = 3x$

02. De um reservatório foram tirados  $3/7$  de água nele contido mais 2400 litros. Sobraram ainda  $2/5$  do conteúdo. Quantos litros d'água tinha o reservatório ?

03. Há cinco anos minha idade era o quádruplo da sua. Daqui a dez anos juntos teremos 55 anos. Quantos anos eu tinha quando você nasceu ?

04. Se dez bolas da gaveta A forem retiradas e colocadas na gaveta B, esta ficará com o dobro do número de bolas de A. Se, no entanto, dez bolas de B forem passadas para A então as duas gavetas ficarão com quantidades iguais de bolas. O total de bolas das duas gavetas é :

05. Num pátio existem carros e motos. O nº total de rodas é 130 e o número de motos é o triplo do número de carros. O número total de veículos que se encontram no pátio é :

### EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01.(FUVEST) O dobro de um número mais a sua terça parte, mais a sua quarta parte somam 31. Determine o número.

02.(PUC) O quociente entre dois números naturais consecutivos é igual a 1,090909... .

A soma desses números é igual a :

03.(UF-MG) De um recipiente cheio de água tiram-se  $2/3$  de seu conteúdo. Recolocando-se 30 litros de água, o conteúdo passa a ocupar a metade do volume inicial. A capacidade do recipiente é :

04.(UNIPAR) A quinta parte de um enxame de abelhas pousou em uma rosa, a terça parte em um cravo, o triplo da diferença entre esses dois números voa sobre um lírio, e uma abelha paira sozinha, no ar, atraída pelo perfume de um jasmim e de uma orquídea. Qual o número total de abelhas ?

- a) 90
- b) 60
- c) 45
- d) 30
- e) 15

05.(UNIPAR) Lino disse à Lauro: Eu tenho o triplo da idade que tu tinhas quando eu tinha a idade que tu tens". Sabendo que a soma da idade dos dois é 45. Qual a idade de Lino ?

- a) 21
- b) 24
- c) 27
- d) 30
- e) 33

06.(UNIPAR) Arnaldo disse à Clemência: "Eu tenho o triplo da idade que tu tinhas quando eu tinha a idade que tu tens. Quando tiveres a idade que tenho, a soma de nossas idades será 49". Qual a idade de Arnaldo ?

- a) 18
- b) 21
- c) 28
- d) 35
- e) 32

07.(UNIPAR) Reza a lenda que em homenagem a Diofante, célebre matemático de outrora, fora gravada na lápide de seu túmulo o seguinte enigma: "Deus lhe concedeu a graça de ser um menino pela sexta parte de sua vida. Depois, por um doze avos, ele cobriu seu rosto com a barba. A luz do casamento iluminou-o após a sétima parte e cinco anos depois do casamento Ele concedeu-lhe um filho. Ah, criança tardia e má, depois de viver a metade da vida de seu pai o destino frio a levou. Após consolar sua mágoa em sua ciência dos números, por quatro anos, Diofante terminou sua vida." Quantos anos viveu o matemático ?

- a) 36
- b) 42
- c) 56
- d) 78
- e) 84

08.(UNIPAR) Um copo de água cheio pesa 325g. Se jogarmos metade da água fora, seu peso cai para 180g. Qual o peso do copo vazio?

- a) 35
- b) 45
- c) 55
- d) 65
- e) 75

09.(UNIPAR) O valor de x que verifica a equação  $\frac{2x-1}{3} - \frac{x+1}{4} = \frac{3}{5}$  é igual a:

- a)  $71/25$
- b)  $41/25$
- c)  $48/25$
- d)  $17/60$
- e)  $5/12$

10.(UNIPAR) Num grupo de rapazes e moças, 10 moças foram embora e o número de rapazes ficou igual ao número de moças. Após certo tempo, 24 rapazes foram embora, e o número de moças ficou o quádruplo do número de rapazes. Podemos afirmar que, inicialmente, havia no grupo:

- a) 30 moças
- b) 40 moças
- c) 40 rapazes
- d) 50 rapazes
- e) 60 pessoas

**11.(UEM)** O anfitrião de uma festa calculou que, se fossem distribuídas 3 garrafas de refrigerante para cada 2 convidados, faltariam 7 garrafas; porém, se oferecesse 4 garrafas para cada três convidados sobriariam 2 garrafas. Então, o número disponível de garrafas era...

**12.(UEL)** Um grupo de jovens participava de uma festa. Às 23h retiraram-se 12 garotas do grupo e o número de rapazes ficou sendo o dobro do de garotas. Em seguida, retiraram-se 15 rapazes e o número de garotas ficou sendo o dobro do de rapazes. Inicialmente, o número de jovens do grupo era:

**13.(UEM)** Paulo sai de Maringá, viajando a velocidade constante. Em determinado instante, passa por um marco que contém dois algarismos. Uma hora depois, passa por outro marco contendo os dois mesmos algarismos, mas em ordem inversa. Uma hora depois, passa por um terceiro marco contendo os mesmos algarismos, mas separados por um zero. Qual a velocidade em km/h?

**14.(FUVEST)** Um casal tem filhos e filhas. Cada filho tem o número de irmãos igual ao número de irmãs. Cada filha tem o número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs. Qual é o total de filhos e filhas do casal?

**15.** No meu rebanho são todos camelos menos dois. São todos cabras menos dois. São todos cavalos menos dois. Quantos animais eu tenho?

**16.(UEM)** José gastou tudo o que tinha no bolso em três lojas. Em cada uma gastou 1 (um) real a mais do que a metade do que tinha ao entrar. Quanto tinha José quando entrou na primeira loja?

## 9 - EQUAÇÃO DO 2º GRAU

### Definição:

Equação do 2º grau em  $\mathfrak{R}$ , na incógnita  $X$ , é toda igualdade do tipo:

$$a.x^2 + b.x + c = 0$$

Onde  $a, b$  e  $c \in \mathfrak{R}$ , com  $a \neq 0$ .

### CLASSIFICAÇÃO:

Numa equação do tipo  $ax^2 + bx + c = 0$ , quando  $b \neq 0$  e  $c \neq 0$ , a equação é chamada completa. A equação do 2º grau é dita incompleta quando:

- a)  $c = 0$ , a equação fica:  $ax^2 + bx = 0$
- b)  $b = 0$ , a equação fica:  $ax^2 + c = 0$
- c)  $b = c = 0$ , a equação fica:  $ax^2 = 0$

### RESOLUÇÃO:

A resolução da equação de 2º grau é obtida através de uma fórmula que foi demonstrada por Bháskara, matemático hindu, nascido em 1114.

### FÓRMULA DE BHÁSKARA

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A quantidade  $b^2 - 4ac$  que aparece sob o radical é denominada discriminante simbolizada pela letra grega  $\Delta$  (delta).

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Considerando o discriminante, a fórmula resolutive pode ser escrita:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

### RELAÇÃO: DISCRIMINANTE - RAÍZES

Os tipos de raízes de uma equação do 2º grau podem ser previstas pelo discriminante quando:

$\Delta > 0$  : a equação admite duas raízes reais e diferentes.

$\Delta = 0$  : a equação admite duas raízes reais e iguais.

$\Delta < 0$  : a equação admite duas raízes imaginárias e diferentes.

### EXERCÍCIOS EM AULA :

**01.** Resolver as equações :

a)  $3x^2 - 4x + 4 = 0$

b)  $x^2 - 8x + 16 = 0$

c)  $x^2 + x + 2 = 0$

### RELAÇÕES DE GIRARD

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$S: x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad e \quad P: x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Onde **S** é a soma das raízes e **P** o produto das raízes.

Se, em particular, tivermos na equação do 2º grau  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a = 1$ , a mesma ficará:

$$x^2 + bx + c = 0$$

Pode-se demonstrar que as raízes da equação, neste caso, serão tais que:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -b \\ x_1 \cdot x_2 &= c \end{aligned}$$

Essas relações permitirão a solução da equação com relativa simplicidade pois, para determinar as raízes basta procurar dois números que multiplicados resultam c e somado resulta b com o sinal trocado.

### EXERCÍCIOS EM AULA :

01. Resolver as equações :

- a)  $x^2 - 5x + 6 = 0$
- b)  $x^2 + x - 20 = 0$
- c)  $x^2 - 7x + 12 = 0$
- d)  $x^2 - 11x + 30 = 0$
- e)  $x^2 - 13x + 40 = 0$
- f)  $x^2 + x - 2 = 0$
- g)  $x^2 - x - 2 = 0$
- h)  $x^2 - 3x - 10 = 0$
- i)  $x^2 + 4x + 4 = 0$
- j)  $x^2 - 4x + 4 = 0$

RESPOSTAS: a) 2 e 3      b) 1  
 c) 4 e 3    d) 6 e 5    e) 5 e 8    f) 1    g) 2  
 h) 2    i) sem solução    j) 2

### EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01.(FUVEST) A equação  $\frac{2}{x^2 - 1} + \frac{1}{x + 1} = -1$

- a) tem apenas uma raiz real
- b) tem duas raízes reais cuja soma é 1
- c) não tem nenhuma raiz real
- d) tem três raízes reais cuja soma é -1
- e) admite 4 como raiz

02.(UF-BA) A razão entre a soma e o produto das raízes da equação

$$2x^2 - 14x + 9 = 0 \text{ é :}$$

- a) 14/9
- b) 2/9
- c) -14
- d) 63/2
- e) -63/2

03.(FUVEST) A equação  $\frac{x}{1-x} + \frac{x-2}{x} - 1 = 0$  tem duas raízes. A soma e o produto dessas raízes são iguais a :

- a) -2
- b) 0
- c) 3
- d) -4
- e) 1

04.(FUVEST) Subtraindo-se 3 de um certo número, obtém-se o dobro da sua raiz quadrada. Qual é esse número?

05. Resolver a equação  $\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = 6$ .

06. Um valor de k para o qual uma das raízes da equação  $x^2 - 3kx + 5k = 0$  é o dobro da outra, é:

- a) 5/2
- b) 2
- c) -5
- d) -2
- e) -5/2

07.(UF-MG) A soma e o produto das raízes da equação  $px^2 + 2(q-1)x + 6 = 0$  são, respectivamente, -3 e 3. O valor de q é:

- a) -4
- b) -2
- c) 0
- d) 2
- e) n.d.a.

08. Para quais valores de k a equação  $3x^2 + 5x + k = 0$  apresenta duas raízes reais distintas

09. Para quais valores de k a equação  $x^2 + kx + k + 3 = 0$  apresenta duas raízes reais iguais

10. Para quais valores de k a equação  $kx^2 + 6x - 1 = 0$  não apresenta raízes reais ?

## 10 - INEQUAÇÃO DO 1º GRAU

### 1. CONCEITO

É toda desigualdade do 1º grau.

Exemplos:

- a)  $2x - 3 > 0$
- b)  $5x - 4 < 0$

### 2. RESOLUÇÃO

Basta isolar a variável. Age-se como se fosse uma equação, exceto quando se multiplica ou divide por um número negativo. Neste caso, deve-se inverter a desigualdade.

## SISTEMA DE INEQUAÇÃO DO 1º GRAU

É um conjunto de inequação que devem ser satisfeita simultaneamente.

**REGRA :**

- 1) Resolve-se cada inequação separadamente.
- 2) Faz-se a intersecção das soluções

**Prof :**

01) Resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ -x - 2 > -5 \end{cases}$$

### INEQUAÇÕES DO 1º GRAU TIPO QUOCIENTE E PRODUTO

#### 1. CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO DE SINAIS DE $h(x)$

**REGRA :**

- 1) Resolver a inequação  $h(x) > 0$ .
- 2) Para onde o "sinal apontar" marque + , no outro sentido marque - .

#### 2. RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÃO TIPO QUOCIENTE

**REGRA :**

- 1) Colocar a inequação na forma:  

$$\frac{h(x)}{g(x)} \text{ sinal } 0.$$
- 2) Construir os gráficos de sinais de  $h(x)$  e  $g(x)$ .
- 3) Multiplicar os sinais dos gráficos.

**Observações :**

- 1) Se o sinal da inequação for  $>$  ou  $<$  fazer numerador e denominador  $> 0$ .
- 2) Se o sinal da inequação for  $\geq$  ou  $\leq$  fazer o numerador  $\geq 0$  e o denominador  $> 0$ .  
( O denominador não pode ser nulo ).

**MESTRE :**

01) Resolver as inequações :

$$a) \frac{3x - 12}{4x} < 0$$

$$b) \frac{4x - 8}{x - e} \geq 0$$

### 3. RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÃO DO TIPO PRODUTO

**REGRA :**

- Se o sinal da inequação for  $>$  ou  $<$  fazer cada fator  $> 0$ .  
 Se o sinal da inequação for  $\geq$  ou  $\leq$  fazer cada fator  $\geq 0$ .

**PROFESSOR :**

01) Resolver as inequações :

$$a) (x + 6).(x - 2) < 0$$

$$b) (4x - 12).(2x - 1) \geq 0$$

### 11 - INEQUAÇÕES DO 2º GRAU

#### 1. DEFINIÇÃO

É toda desigualdade do 2º grau.

Exemplos:

$$a) 2x^2 - 3x + 5 > 0$$

$$b) x^2 - 7 \leq 0$$

$$c) x^2 + 4x \geq 0$$

#### 2. NOTAÇÕES

- $m/a \rightarrow$  o sinal da inequação é o mesmo de  $a$  (  $a$  é o coeficiente de  $x^2$  )
- $c/a \rightarrow$  o sinal da inequação é contrário ao de  $a$ .
- $m/a$  EXTRA  $\rightarrow$  as soluções da inequação são os valores de  $x$ , extra raízes. Isto é, que estão fora do intervalo das raízes da equação  $ax^2 + bx + c = 0$
- $c/a$  INTRA  $\rightarrow$  as soluções da inequação são os valores de  $x$ , intra raízes. Isto é, que estão dentro do intervalo das raízes da equação  $ax^2 + bx + c = 0$

**PROFESSOR :**

01) Resolver as inequações :

$$a) x^2 - 12x + 32 > 0$$

$$b) x^2 - 14x - 32 \geq 0$$

### 3. CASO EM QUE AS RAÍZES SÃO REAIS E IGUAIS

Tome por exemplo o trinômio

$$h(x) = x^2 - 6x + 9.$$

Suas raízes são :  $x_1 = 3$  e  $x_2 = 3$ .  
 O intervalo das raízes é :  $[ 3, 3 ]$ .  
 Quem está dentro do intervalo das raízes é :  
 $\{ x \in \mathbb{R}/x = 3 \}$ .  
 Quem está fora do intervalo das raízes é :  
 $\{ x \in \mathbb{R}/x \neq 3 \}$ .

**PROFESSOR :**

01) Resolver as inequações :

a)  $x^2 - 12x + 36 \leq 0$

b)  $x^2 + 14x + 49 > 0$

**4. CASO EM QUE NÃO EXISTEM RAÍZES REAIS**

Agora, tome o trinômio  $h(x) = x^2 + 2x + 5$ .  
 Não existe raiz real, pois  $\Delta < 0$   
 O intervalo real das raízes é :  $\emptyset$ .  
 Quem ( real ) está dentro do intervalo das raízes é :  
 $\emptyset$   
 Quem ( real ) está fora do intervalo das raízes é  $\mathbb{R}$ .

**PROFESSOR :**

01) Resolver as inequações :

a)  $x^2 + 2x + 5 > 0$

b)  $4x^2 - 3x + 2 \leq 0$

**OBS :**  
**RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÕES DO 2º GRAU**

$$\Delta < 0 \Rightarrow \begin{cases} m / a \rightarrow \text{Todos os reais, } \mathbb{R} \\ c / a \rightarrow \text{Conjunto vazio, } \emptyset \end{cases}$$

**12 - SISTEMA DE INEQUAÇÃO DO 2º GRAU**

**1. RESOLUÇÃO**

O método de resolução é simples: resolve-se cada inequação separadamente e depois faça a intersecção das resposta.

**Observação Importante:**

Cuidado para não confundir a solução de sistema de inequações ( tanto do 1º como do 2º grau ) com solução de inequação tipo quociente ou produto. Veja que os procedimento são parecidos, porém diferentes.

**PROFESSOR :**

01) Resolver o sistema :

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ x^2 - 9 \leq 0 \end{cases}$$

**INEQUAÇÕES DO 2º GRAU TIPO QUOCIENTE E PRODUTO**

**1. TIPO QUOCIENTE**

O procedimento é o mesmo adotado para as inequações do 1º grau. Isto é,

- 1) Coloca-se a inequação na forma  $\frac{h(x)}{g(x)}$  sinal 0.
- 2) Constrói-se os gráficos de sinais de  $h(x)$  e  $g(x)$
- 3) Multiplicam-se os sinais.

**1.1 CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO DE SINAIS**

**REGRA :**

- 1) Forme a inequação  $h(x) > 0$ .
- 2) Se  $h(x) > 0$  for tipo c/a marque - entre as raízes e + fora.  
 Se  $h(x) < 0$  for tipo c/a marque + entre as raízes e - .

**PROFESSOR :**

01) Resolver a inequação :

$$\frac{x^2 - 12x + 20}{-2x^2 + 30x - 28} \leq 0$$

**2. INEQUAÇÃO TIPO PRODUTO**

É o mesmo procedimento adotado para inequações tipo quociente.

**Obs:**

Se a inequação tiver sinal  $\geq$  ou  $\leq$  ao construir os gráficos de sinais, fazer sempre cada fator  $\geq 0$ .

**PROFESSOR :**

01) Resolver a inequação :  
 $(x^2 - 9x + 14).(x^2 - 2x + 5) \geq 0$

**EXERCÍCIOS PROPOSTOS**

01)  $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} > \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$  :

- a)  $x > 7/6$
- b)  $x > 1$
- c)  $x < 0$
- d)  $x > 6/7$
- e) n.d.a

02) Resolvendo-se a inequação  $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} \geq \frac{2x}{3} - \frac{7}{3}$  podemos afirmar que :

- 01) 5 é solução da inequação  
 02) -2 é solução da inequação  
 04)  $\pi$  é solução da inequação  
 08) 180 é solução da inequação  
 16) o maior n° que satisfaz a inequação é 7/2

03)  $\frac{3(x-4)}{4} \leq \frac{6(x-5)}{3} - 3$

- a)  $(-\infty, 8)$   
 b)  $[8, +\infty)$   
 c)  $(-\infty, 8]$   
 d)  $[8, +\infty]$   
 e) n.d.a

04)  $\begin{cases} 3x - 1 > 2x + 2 \\ \frac{1 - 2x}{3} < 2 - x \end{cases}$

- a)  $3 < x < 5$   
 b) incompatível  
 c)  $x < 3$   
 d)  $5 < x < 8$

05)  $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 3 < 5 \\ x > 4 \end{cases}$

- a) incompatível  
 b)  $8 < x < -4$   
 c)  $-4 < x < 8$   
 d)  $4 < x < 8$   
 e) n.d.a

06) A solução  $\frac{(5x-25)}{2x-12} \leq 0$  é :

- a)  $5 \leq x \leq 6$   
 b)  $x \geq 6$  ou  $x \leq 5$   
 c)  $5 \leq x < 6$   
 d) só  $x \geq 6$   
 e) só  $x \leq 5$

07) A solução de  $\frac{-7x+2}{2x} < 0$  é :

- a)  $0 < x < 2/7$   
 b)  $x < 0$  ou  $x > 2/7$   
 c) só  $x < 0$   
 d) só  $x > 2/7$   
 e) n.d.a

08) A solução de  $(2-3x).(1-x) > 0$  é :

- a)  $2/3 < x < 1$   
 b)  $x < 1$   
 c)  $x < 2/3$   
 d)  $x < 2/3$  ou  $x > 1$   
 e) n.d.a

09) A solução de  $(3x-18).(5x-10) > 0$  é :

- a)  $x < 2$  ou  $x > 6$   
 b)  $2 < x < 6$   
 c)  $x < 6$  ou  $x > 2$   
 d) só  $x > 6$   
 e) n.d.a

10) A solução de  $\frac{(x+3).(x-2)}{x-5} \leq 0$  é :

- a)  $x \leq -3$  ou  $2 \leq x < 5$   
 b)  $x \leq 2$  ou  $x \geq 5$   
 c)  $-3 \leq x < 2$  ou  $x > 5$   
 d)  $x \geq 0$   
 e) n.d.a

11) Resolvendo  $\frac{2y}{(1-y).(2y+2)} \leq 0$  temos :

- a)  $-1 < y \leq 0$  ou  $y > 1$   
 b)  $-1 \leq y < 0$  ou  $y \geq 1$   
 c)  $-1 < y < 0$  ou  $y \geq 1$   
 d)  $0 < y < 1$  ou  $y < 1$   
 e) n.d.a

12)  $(x-1)^2 + (x+1)^2 \geq 130$

- a)  $(-\infty, -8] \cup [8, +\infty)$   
 b)  $(-\infty, 8[ \cup ]8, +\infty)$   
 c)  $(-\infty, +\infty)$   
 d) n.d.a

13)  $\frac{x^2+3}{3} \geq 2 + \frac{3x-1}{4}$

- a)  $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 3\}$   
 b)  $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 3$  ou  $x < 2\}$   
 c)  $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 3$  ou  $x \leq -3/4\}$   
 d) n.d.a

14) Encontre o conjunto dos números reais cujo quadrado diminuído de seu quádruplo é maior que 24 :

- 01)  $] -\infty, -3[ \cup ]8, +\infty[$   
 02)  $] -\infty, -3[ \cap ]8, +\infty[$   
 04)  $\{x \in \mathbb{R} / x < -3$  ou  $x > 8\}$   
 08)  $[-3, 8]$   
 16)  $] -3, 8[$

15)  $\begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 \geq 0 \\ 3x - x^2 > 0 \end{cases}$

- a) (2, 3)  
 b) [2, 3)  
 c)  $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$   
 d)  $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$   
 e) n.d.a

16)  $\begin{cases} x^2 - 3x - 10 < 0 \\ x^2 - 9x + 18 > 0 \end{cases}$

- a)  $-2 < x < 13$   
 b)  $x < -2$

- c)  $x > 3$   
 d)  $-2 < x < 3$   
 e) n.d.a

$$17) \frac{x-2}{x^2-2x-15} \leq 0$$

- a)  $(-\infty, -3) \cup [2, 5)$   
 b)  $(-\infty, 5)$   
 c)  $(-\infty, 2]$   
 d)  $(-3, -2] \cup [2, +\infty)$   
 e) n.d.a

$$18) \frac{2x^2+x-3}{x^2-5x+4} > 1$$

- a)  $(-\infty, 7)$   
 b)  $(4, +\infty)$   
 c)  $(-\infty, -7) \cup (4, +\infty)$   
 d)  $(-\infty, -7) \cup (1, +\infty)$   
 e) n.d.a

$$19) (-x^2+4x-4).(x^2-5x+6) \leq 0$$

- a)  $(-\infty, 3)$   
 b)  $(2, 3)$

- c)  $[2, 3]$   
 d)  $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$   
 e) n.d.a

$$20) (x^2-4x+6).(2-x) \leq 0$$

- a)  $x < 3$   
 b)  $x > 2$  ou  $x < 3$   
 c)  $x < 3$  ou  $x > 4$   
 d)  $x > 2$   
 e) n.d.a

#### GABARITO :

- |       |        |
|-------|--------|
| 01) d | 02) 06 |
| 03) b | 04) a  |
| 05) d | 06) c  |
| 07) b | 08) d  |
| 09) a | 10) a  |
| 11) a | 12) a  |
| 13) c | 14) 05 |
| 15) b | 16) d  |
| 17) a | 18) d  |
| 19) d | 20) e  |

## RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

### POTENCIAÇÃO: P

- |               |                |                |
|---------------|----------------|----------------|
| 1) $3^{10}$   | 1) 512         | 1) $x^8$       |
| 2) $(-2/3)^4$ | 2) 64          | 2) $A^{n-5}$   |
| 3) $x^2$      | 3) 3           | 3) 8           |
| 4) $A^{n+3}$  | 4) 9           | 4) 9           |
| 5) 2          | 5) 24          | 5) 24          |
|               | 6) $a^{-5}b^9$ | 6) $a^{-5}b^9$ |

### POTENCIAÇÃO- P1

- |                  |              |
|------------------|--------------|
| a) 0             | 13) 8        |
| 25) 8            |              |
| b) 0             | 14) 17/6     |
| 26) -3           |              |
| c) 13            | 15) 1        |
| 27) $x^3$        |              |
| d) 9             | 16) 41/36    |
| 28) 1/1000       |              |
| e) indeterminada | 17) 6        |
| f) impossível    | 18) 1        |
| g) 8             | 19) 81/5     |
| h) 0             | 20) 1        |
| i) $x^3$         | 21) -8       |
| j) 31/6          | 22) 7        |
| k) 27/4          | 23) $2^{11}$ |
| l) 11/8          | 24) 15       |

## EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

### EXERCÍCIOS I

- 1) 48
- 2) -10
- 3) -10
- 4) 10
- 5) 2
- 6) 1/2

### EXERCÍCIOS II

- a) racional inteira
- b) irracional
- c) racional fracionária
- d) racional inteira
- e) racional inteira

### EXERCÍCIO - III

- 1) a)  $6x^4 + 2x^3 - 8x^2 - x - 10$   
 b)  $-2x^3 + 4x^2 + 3x + 4$
- 2)  $-2a^2x - 2x^2 + 8x^3 - 8$
- 3) 1

### EXERCÍCIO - IV

- a)  $-10x^4y^8$
- b)  $24a^3x^6y^{18}b^5$
- c)  $4-x^3y^3z^6t^3$
- d)  $90a^6x^3$
- e)  $4a^4x^{10}$
- f)  $7/3x^4t^5 = \frac{7x^4t^5}{3}$
- g)  $-5a^6b^5$
- h)  $3x^5y^5$

EXERCÍCIO V

- a)  $-10a^7b^7 + 8a^6b^1 + 2a^5b^7$   
 b)  $3x^3y^3t^7 - 9x^4y^2t^4 + 15x^5y^3t^7$   
 c)  $-2x^7 + 3x^5 - 2x^4 + x^3$   
 d)  $-4x^3y^2 + 3x^2y^2 - 5x^2y^3$   
 e)  $-6a^2dx^7y^6 + 8bdx^6y^7 = 10cdx^5y^8$

EXERCÍCIO VI

- a)  $5a^5+b - 12a^4b^2 - 3a^3 + 21a^3b^3 + 18a^2b^4 + 9a^2b - 18ab^2$   
 b)  $6x^5y^3 + 2x^4y^2 - 6x^3y - 9x^4y^4 - 3x^3y^3 + 9x^2y^2 + 3x^3y^5 + x^2y^4 - 3xy^3$   
 c)  $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24$   
 d)  $2x^6 - 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x^2$   
 e)  $x^7 - x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x$

EXERCÍCIO VII

- 1)  $-3x^5y^5$   
 2)  $3a^3b^3c^3$   
 3)  $-5y^4/x^5$   
 4)  $2xy^2z^6$   
 5)  $-2x^2y^3/z^4$   
 6)  $2x^2y^3/7$

EXERCÍCIO VIII

- 1)  $5a^2b^3 - 10a^2b + 15a^3b^4$   
 2)  $-2xyz^5 + 4x - 6x^3y$   
 3)  $-2c^3+d - 10c^4d^4 - 1$

EXERCÍCIO IX

- a)  $Q = 4x - 6$  e  $R = 21x - 5$   
 b)  $Q = 3x^2 - 12x + 42$  e  $R = -203x + 126$   
 c)  $Q = 3x^3 + 3x$  e  $R = 2x + 4$   
 d)  $Q = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  e  $R = 0$   
 e)  $Q = 4y^2 + 12$  e  $R = -6y^2 + 34y - 21$

FATORAÇÃO:

1º caso:

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy - 6xz - 12yz$$

$$4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 12xy - 16xz + 24yz$$

$$x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2$$

$$a^2 + b^2/4 + c^2/9 - ab + 2ac/3 - bc/3$$

$$1/4 + x^2 + y^2/9 + x - y/3 - 2xy/3$$

2º caso

$$(x + 1)(x^2 + 1)$$

$$(x - 1)(x^2 + 5)$$

$$(x - 2)(4x^2 + 3)$$

$$(x - 2)(6x^2 - 1)$$

$$(b - a)(x - y)$$

$$(2x - 1)(2x - 2y)$$

3º caso

$$(3a + 2b)(3a - 2b)$$

$$(a + 4)(a - 4)$$

$$(x - 10)(x + 1)$$

$$(1 + a)(1 - a)$$

$$(5 + x^2y^2)(5 - x^2y^2)$$

$$(x^3y^4 - 2a^2b).(x^3y^4 + 2a^2b)$$

$$(6x^2y + a^5)(6x^2y - a^5)$$

$$(7a^4b^5 - 8x^3y^6).(7a^4b^5 + 8x^3y^6)$$

4º caso:

$$(3a^2 - 4b^3)^2$$

$$(5x^4 + 2x^5)^2$$

$$(3x + 2)^2$$

$$(m^3 - 4n^6)^2$$

$$(3x/2 + 5y)^2$$

$$(2a^3b^4 - 5c^2d^5)^2$$

5º caso

$$(x - 2)(x - 3)$$

$$(x + 1)(x + 9)$$

$$(x + 4)(x - 3)$$

$$(x + 1)(x + 5)$$

$$(x - 2)(x - 4)$$

$$(x - 4)(x - 25)$$

$$(x + 3)(x - 5)$$

$$(x - 4)(x + 7)$$

$$-(x - 2)(x + 7)$$

$$-(x - 3)(x + 8)$$

*Sou sargento hoje porque sonhei que seria ontem. Sem sonhar dificilmente conseguiremos alcançar nossos objetivos. Os sonhos são a matéria prima da REALIDADE.*

**ESTUDE E SONHE COM SUA REALIDADE.**

# GEOMETRIA

## INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA GEOMETRIA

### 1. INTRODUÇÃO

A Geometria Plana estuda as figuras planas. Entendemos por figura plana todo subconjunto, não vazio, de pontos de um plano. Quando dizemos que uma figura é plana, estamos afirmando que ela está totalmente contida num plano.

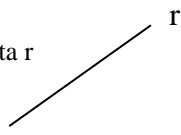
**O conjunto universo da geometria plana, será, pois, o plano**

#### Representação Gráfica

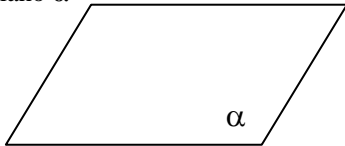
Ponto A

A .

Reta r



Plano  $\alpha$



### 2. PONTO, RETA E PLANO

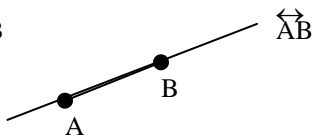
São idéias primitivas, entes que não possuem definição. Conhecemos **imagens** de ponto, por exemplo, como a ponta do giz marcando o quadro-negro, um lápis tocando o papel, sendo no entanto, apenas imagens, pois não há dimensão para tanto. Analogamente, possuímos a intuição de reta e plano.

#### Notação:

Costuma-se indicar:

- os pontos com letras maiúsculas A, B, C, ...
- as retas com letras minúsculas r, s, t, ...
- os planos com letras do alfabeto grego  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$
- como dois pontos distintos determinam uma reta, pode-se indicar a reta por dois de seus pontos.

Reta  $\overleftrightarrow{AB}$



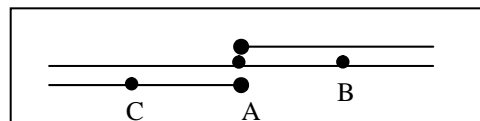
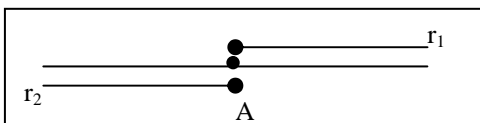
### 3. SEMI-RETA

Um ponto A de uma reta R divide a mesma em dois subconjuntos chamados **semi-retas**.

O ponto A é origem das semi-retas e pertence a ambas. Representa-se por  $Ar_1$

e  $Ar_2$ .

A semi-reta pode ser também, indicada por dois pontos. AB indica a semi-reta com origem A, que contém o ponto B e AC indica a semi-reta com origem A, que contém o ponto C.

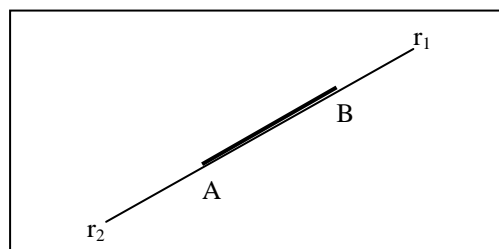


### 4. SEGMENTO DE RETA

Podemos definir segmento de reta como sendo a intersecção de duas semi-retas, cada uma contendo a origem de outra. Representa-se por AB.

Simbolicamente:

$$\overline{AB} = \overrightarrow{Ar_1} \cap \overrightarrow{Br_2}$$

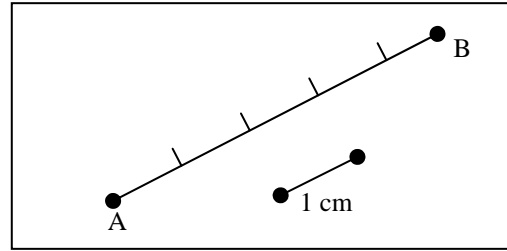


### 5. MEDIDAS

Medida de um ente geométrico é um número real positivo, obtido pela comparação deste ente com outro escolhido como unidade. Ao escolhermos esta unidade, estamos estabelecendo um sistema de medidas.

A medida do segmento AB em centímetros é 5 e pode ser representada por:

$$AB = 5\text{cm ou med}(AB) = 5\text{cm}$$



### 6. CONGRUÊNCIA

O termo **congruência** não será definido. A idéia intuitiva de congruência entre dois entes geométricos, está associada às suas medidas. Dois entes serão congruentes quando suas medidas forem iguais.

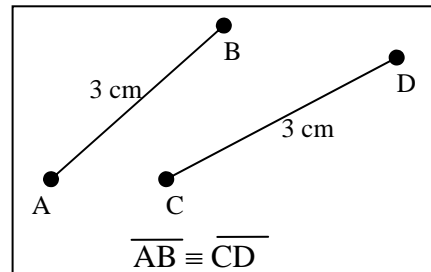
Para indicarmos a congruência entre dois entes geométricos utilizaremos o símbolo  $\cong$ .

### 7. CONGRUÊNCIA DE SEGMENTOS DE RETA

Dois segmentos de reta AB e CD serão congruentes se, e somente se, tiverem mesma medida.

Simbolicamente:

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$$

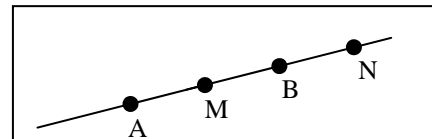


### 8. SEGMENTOS COLINEARES

São aqueles que são subconjuntos da mesma reta.

Exemplos:

$\overline{AB}$ ,  $\overline{MN}$ ,  $\overline{AN}$ ,  $\overline{AM}$ , etc...

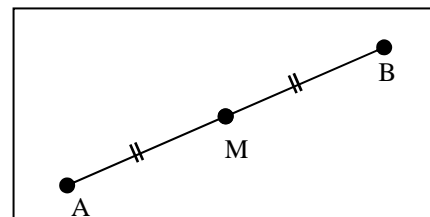


### 9. PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

M será ponto médio de um segmento AB se, e somente se, M pertencer ao segmento AB e AM for congruente com BM.

Assim,

$$M \text{ é o ponto médio de } AB \Leftrightarrow \begin{cases} M \in \overline{AB} \\ \overline{AM} \cong \overline{BM} \end{cases}$$

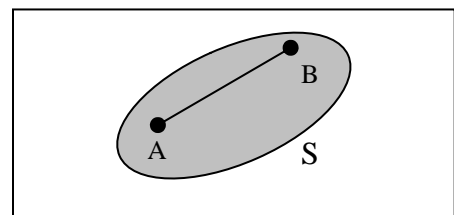


### 10. REGIÃO CONVEXA

Um conjunto de pontos S é uma região convexa se, e somente se, para qualquer par de pontos A e B de S, o segmento AB for subconjunto de S.

Assim,

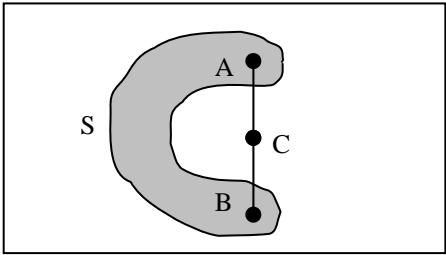
$$S \text{ é convexa} \Leftrightarrow \forall A \in S, \forall B \in S, \overline{AB} \subset S$$



Quando existirem dois pontos A e B de S, de tal forma, que AB não é um subconjunto de S, a região é dita côncava ou não convexa.

Assim,

$$S \text{ é não convexa} \Leftrightarrow \exists A \in S \text{ e } \exists B \in S \text{ tal que } \overline{AB} \not\subset S$$



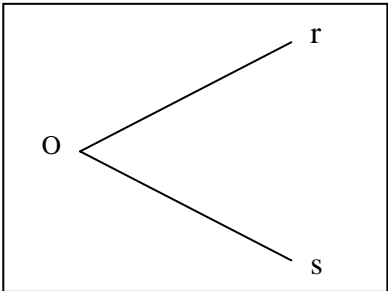
### 11. ÂNGULOS

**Ângulo** é a união de duas semi-retas de mesma origem.

Simbolicamente:

$$r\hat{O}s = \vec{Or} \cup \vec{Os}$$

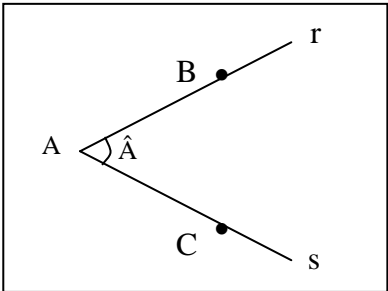
O ponto O é o vértice do ângulo e as semi-retas Or e Os são os lados do ângulo.



**Notação:**

O ângulo determinado pelas semi-retas Ar e As será indicado por:

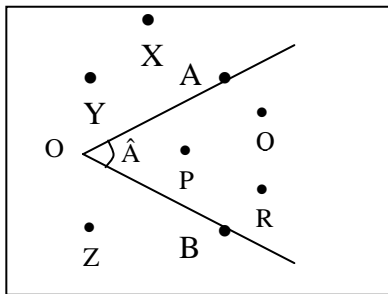
$$r\hat{A}s \text{ ou } B\hat{A}C \text{ ou } \hat{A}$$



### 12. REGIÃO ANGULAR

Observe que o ângulo **geralmente** determina no plano três conjuntos:

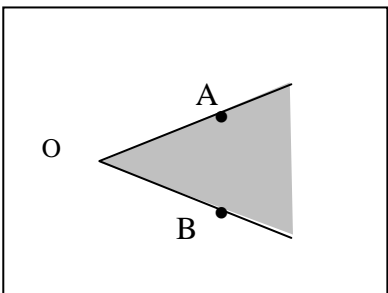
1. pontos "interiores" (P; Q; R; ...)
2. pontos do ângulo (O; A; B; ...)
3. pontos "exteriores" (X; Y; Z; ...)



**Região angular** é a região determinada pela união do conjunto dos pontos do ângulo como conjunto dos pontos "interiores".

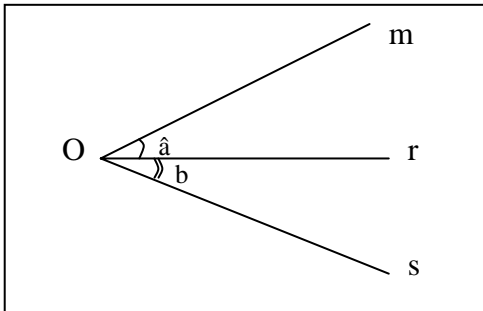
**Observação:**

A região angular é sempre uma região convexa.



### 13. ÂNGULOS CONSECUTIVOS

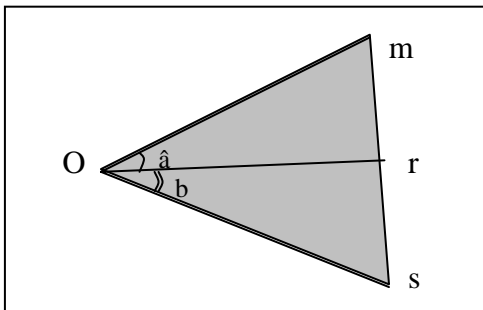
Dois ângulos são consecutivos quando tem mesmo vértice e pelo menos lado em comum.



Os ângulos  $m\hat{O}r$  e  $r\hat{O}s$  são consecutivos pois admitem o lado  $\overrightarrow{Or}$  em comum.

### 14. ÂNGULOS ADJACENTES

Dois ângulos consecutivos serão **adjacentes** quando a intersecção entre seus conjuntos de pontos interiores for **vazia**.



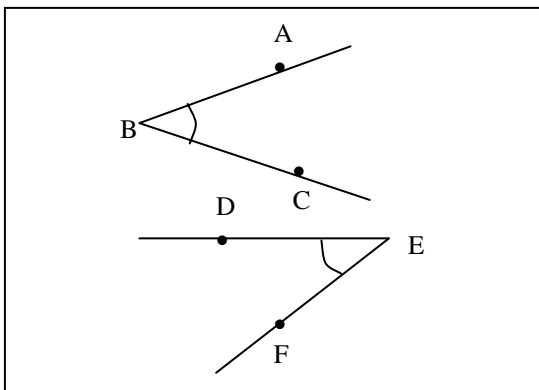
**Observação:**

Dois ângulos adjacentes são sempre dois ângulos consecutivos, porém dois ângulos consecutivos nem sempre são adjacentes.

### 16. CONGRUÊNCIA DE ÂNGULOS

Dois ângulos são congruentes se, e somente se, eles têm a mesma medida.

Simbolicamente:

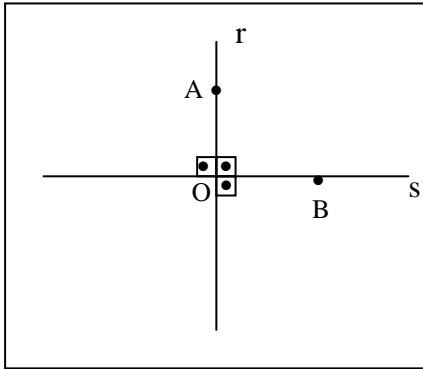


### 15. ÂNGULO RETO

Duas retas são chamadas **concorrentes** se, e somente se, elas possuem um único ponto em comum.

Observe que, duas retas concorrentes determinam quatro regiões angulares adjacentes.

Quando duas dessas **regiões angulares adjacentes** forem **congruentes**, dizemos que qualquer delas define uma **região de ângulo reto**.



**Observação:**

Quando duas retas  $r$  e  $s$  são concorrentes e determinam ângulos adjacentes congruentes elas são chamadas de perpendiculares. Simbolicamente  $r \perp s$ .

**16. SISTEMAS DE MEDIDAS DE ÂNGULO**

**Sistema Graus**

Ângulo de um grau ( $1^\circ$ ) é o ângulo cuja medida é  $1/90$  de um ângulo reto.

O grau admite dois submúltiplos, o minuto e o segundo.

Ângulo de um minuto ( $1'$ ) é o ângulo cuja medida é  $1/60$  de  $1^\circ$ .

Ângulo de um segundo ( $1''$ ) é o ângulo cuja medida  $1/60$  de  $1'$ .

Observe que:

**1 reto  $\rightarrow$   $90^\circ$**

**$1^\circ \rightarrow$  60 minutos**

**1 minuto  $\rightarrow$  60 segundos**

**Sistema Radianos**

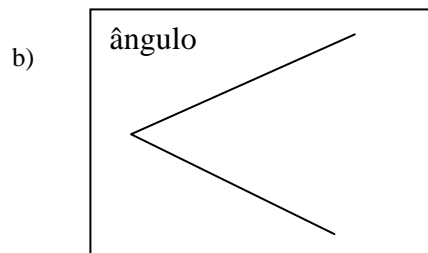
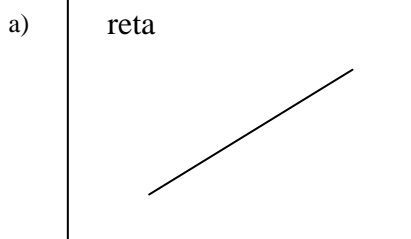
A medida de um ângulo no sistema radianos, é a razão entre o arco que este ângulo determina sobre qualquer circunferência de centro no vértice do ângulo, e o raio da referida circunferência.

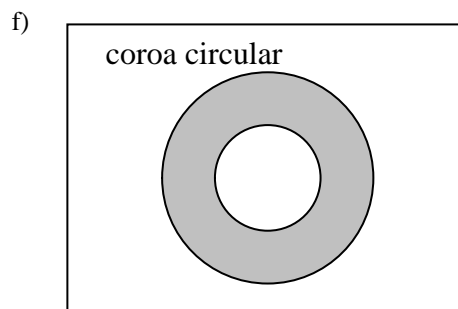
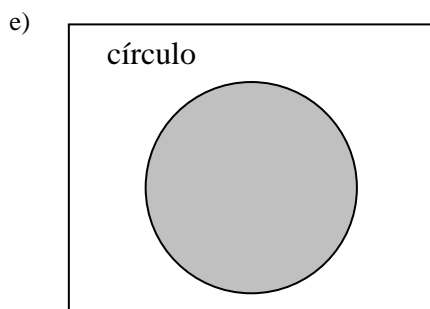
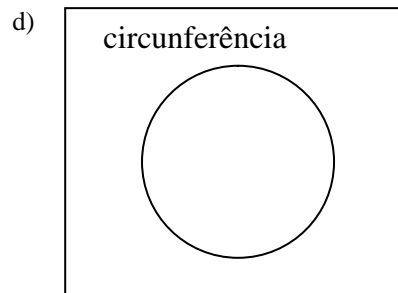
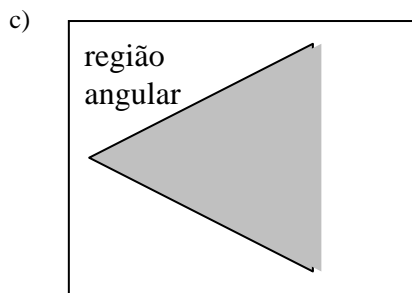
**EXERCÍCIOS**

Exercícios de 1 a 4.

Represente graficamente os seguintes entes geométricos apresentando sua notação.

- a) Reta  $r$  determinada por dois pontos A e B.
- b) Semi-reta determinada por dois pontos A e B, que tem origem no ponto A e contém o ponto B.
- c) Segmento de reta determinado por dois pontos A e B.
- d) Ângulo de lados AO e OB e vértice O.
- e) Classifique as regiões a seguir em convexa e não convexa.





f) Calcular:

1.  $83^{\circ} 20' 43'' + 21^{\circ} 32' 54''$
2.  $92^{\circ} 43' - 47^{\circ} 30'$
3.  $41^{\circ} 23' - 17^{\circ} 21' 43''$
4.  $38^{\circ} : 3$

## ÂNGULOS

### 1. ÂNGULOS AGUDO, OBTUSO E RASO

#### Ângulo agudo

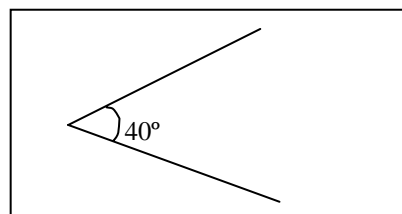
Um ângulo é **agudo**, quando sua medida é **menor** do que a medida de um ângulo reto, ou seja, menor que  $90^{\circ}$ .

#### Ângulo obtuso

Um ângulo é **obtusos**, quando sua medida é **maior** do que a medida de um ângulo reto, ou seja, maior que  $90^{\circ}$ .

#### Ângulo raso

Um ângulo é **raso**, quando seus lados são semi-retas opostas. A medida de um ângulo raso é dois retos ou  $180^{\circ}$ .



### 2. SOMA DE ÂNGULOS

A soma de dois ângulos ABC e DEF é um ângulo PQR tal que:

### 3. BISSETRIZ DE UM ÂNGULO

A bissetriz de um ângulo é a semi-reta com origem no vértice do ângulo, e que o divide em dois ângulos congruentes.

### 4. ÂNGULOS COMPLEMENTARES

Dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é um ângulo reto. Um dos ângulos é chamado complemento do outro.

**Lembrete**

O **complemento** de um ângulo de medida  $x$  é:

$90^\circ - x$
----------------

**5. ÂNGULOS SUPLEMENTARES**

Dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é dois ângulos retos. Um dos ângulos é chamado suplemento do outro.

**Lembrete**

O **suplemento** de um ângulo de medida  $x$  é:

$180^\circ - x$
-----------------

**6. ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE**

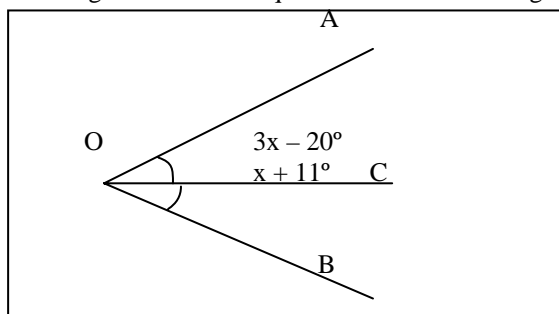
Ângulos opostos pelo vértice são aqueles em que os lados de um são semi-retas opostas aos lados do outro.

**Teorema:**

Se dois ângulos são opostos pelo vértice então eles são **congruentes**.

**EXERCÍCIOS DA AULA**

Calcular  $x$  na figura sabendo-se que  $OC$  é bissetriz do ângulo  $A\hat{O}B$ .



Determinar o complemento e o suplemento de uma ângulo cuja medida é  $x$ .

3. O complemento de um ângulo de  $75^\circ$  mede:

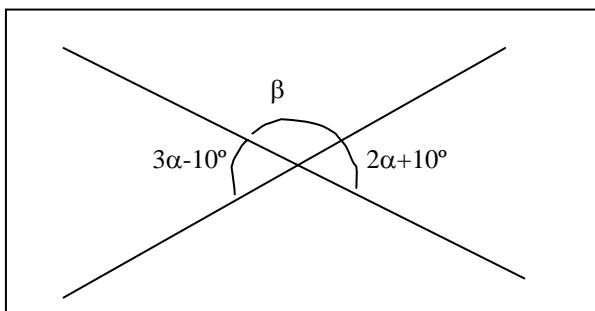
- a)  $105^\circ$  b)  $90^\circ$  c)  $75^\circ$  d)  $25^\circ$  e)  $15^\circ$

4. Calcule o complemento de  $69^\circ 51'22''$ .

5. A medida de um ângulo é igual à metade da medida do seu suplemento. O complemento desse ângulo mede:

- a)  $60^\circ$  b)  $90^\circ$  c)  $120^\circ$  d)  $30^\circ$  e)  $45^\circ$

6. Com os dados da figura, calcule  $\beta$



# PARALELISMO

## 1. NOMENCLATURA

Dadas, num plano, duas retas  $r$  e  $s$  e uma transversal  $t$ , obtemos oito ângulos com as designações

correspondentes:  $\{ \hat{a} \text{ e } \hat{\alpha}; \hat{b} \text{ e } \hat{\beta}; \hat{d} \text{ e } \hat{\delta}; \hat{c} \text{ e } \hat{\gamma} \}$

alternos externos:  $\{ \hat{a} \text{ e } \hat{\gamma}; \hat{b} \text{ e } \hat{\delta} \}$

alternos internos:  $\{ \hat{c} \text{ e } \hat{\alpha}; \hat{d} \text{ e } \hat{\beta} \}$

colaterais externos:  $\{ \hat{a} \text{ e } \hat{\delta}; \hat{b} \text{ e } \hat{\gamma} \}$

colaterais internos:  $\{ \hat{c} \text{ e } \hat{\beta}; \hat{d} \text{ e } \hat{\alpha} \}$

## 2. RETAS PARALELAS

Duas retas são paralelas se, e somente se, são coplanares com intersecção vazia ou são coincidentes. Representa-se  $r \parallel s$ .

### Ângulos correspondentes

Duas retas paralelas distintas formam com uma transversal ângulos correspondentes congruentes e reciprocamente.

### Ângulos alternos

Duas retas paralelas distintas formam com uma transversal ângulos alternos congruentes reciprocamente.

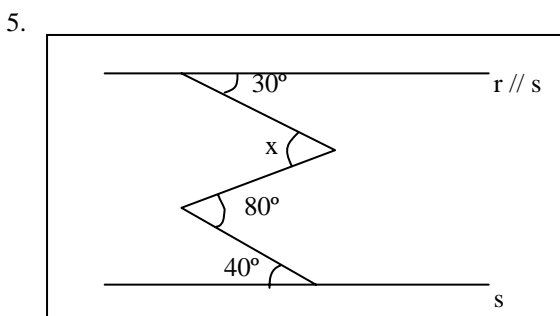
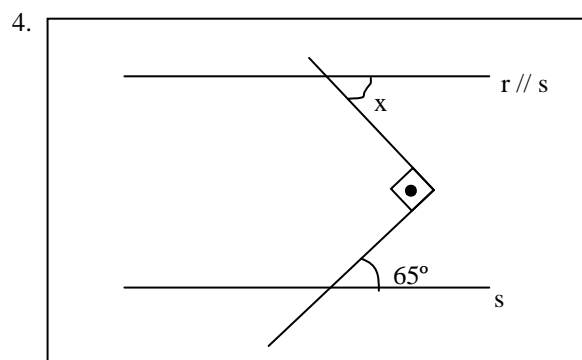
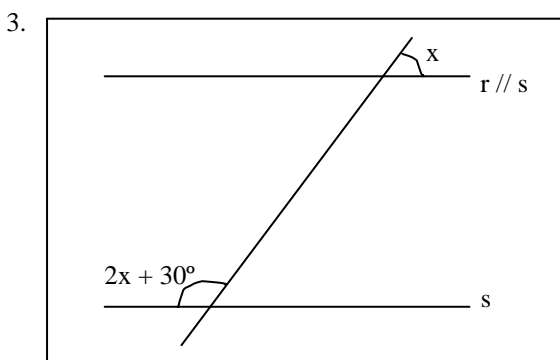
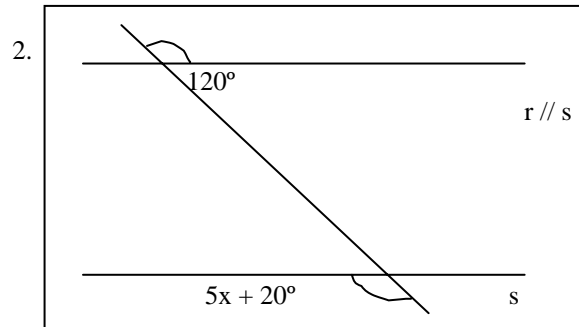
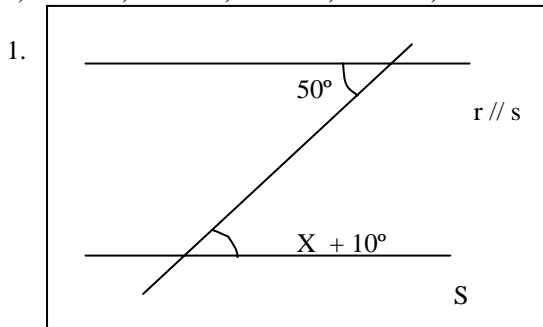
### Ângulos colaterais


Duas retas paralelas distintas formam com uma transversal ângulos colaterais suplementares e reciprocamente.

## EXERCÍCIOS DA AULA

Nos exercícios de 1 a 5, determinar o valor de  $x$ , associado com:

- a)  $20^\circ$    b)  $25^\circ$    c)  $40^\circ$    d)  $50^\circ$    e)  $70^\circ$



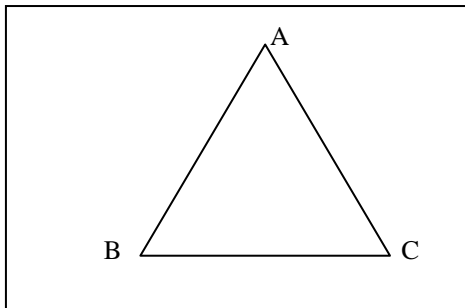
 **APOSTILAS CURSO PRECURSOR**  
**CAXIAS DO SUL-RS** ☎ 0xx54 211 4731  
**MARINGÁ-PR** ☎ 0xx44 228 0587 / 962 4021

6. Demonstre que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$ .

## TRIÂNGULOS

### 1. DEFINIÇÃO

Dados três pontos não colineares A, B e C, chama-se triângulo a união dos três segmentos AB, AC e BC.

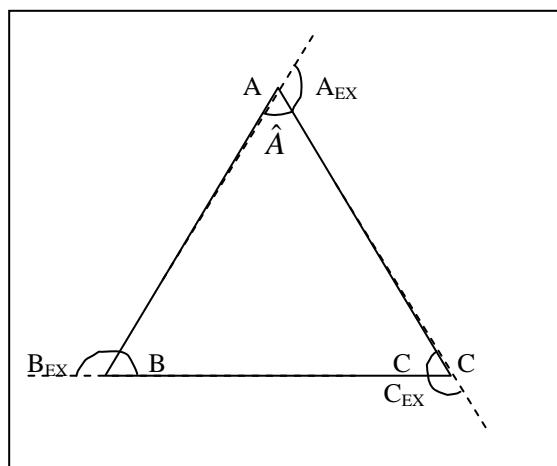


Simbolicamente:

$$\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$$

### 2. ELEMENTOS DO TRIÂNGULO

- Os pontos A, B e C são vértices do triângulo.
- Os segmentos AB, AC e BC são os lados do triângulo.
- Os ângulos  $BAC=A$ ,  $ABC=B$  e  $ACB=C$  são os ângulos internos do triângulo.
- Ângulo externo é o ângulo suplementar do ângulo interno. Na figura  $A_{EX}$ ,  $B_{EX}$  e  $C_{EX}$  são os ângulos externos dos vértices A, B e C respectivamente.



### 3. PROPRIEDADES

#### Soma dos ângulos internos

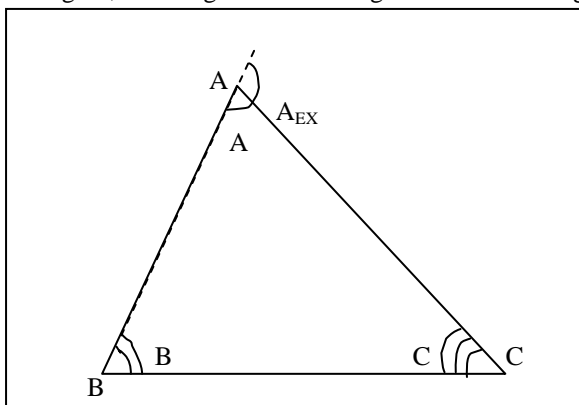
A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é  $180^\circ$ .

Como  $\beta \cong \hat{B}$ ,  $\gamma \cong \hat{C}$ ,  $\hat{A} + \beta + \gamma = 180^\circ$ , temos :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

#### Teorema do ângulo externo

Em qualquer triângulo, cada ângulo externo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes.



$$\left. \begin{array}{l} A + A_{EX} = 180^{\circ} \\ A + B + C = 180^{\circ} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\hat{A}_{EX} = \hat{B} + \hat{C}}$$

**Observação:**

De forma análoga, provamos que:

$$\boxed{\hat{B}_{EX} = \hat{A} + \hat{C}} \quad \text{e} \quad \boxed{\hat{C}_{EX} = \hat{A} + \hat{B}}$$

**4. CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS**

**Classificação quanto aos lados**

Os triângulos são classificados quanto aos lados em:

1. equilátero, quando têm os três lados congruentes.
2. isósceles, quando têm dois lados congruentes.
3. escaleno, quando dois lados quaisquer não são congruentes.

**Classificação quanto aos ângulos**

Os triângulos são classificados quanto aos ângulos em:

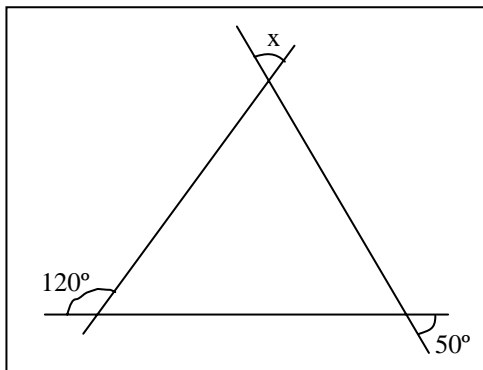
- a) retângulo, quando possui um ângulo reto.
- b) Acutângulo, quando possui os três ângulos agudos.
- c) Obtusângulo, quando possui um ângulo obtuso.

**EXERCÍCIOS DA AULA**

Nos exercícios calcule x, associado com:

- a) 40° b) 60° c) 70° d) 90° e) 100°

1.



2. Classifique os triângulos quanto aos lados.
3. Classifique os triângulos quanto aos ângulos.
4. Assinale a afirmação falsa:
  - a) Todo triângulo equilátero é acutângulo.
  - b) Todo triângulo equilátero é equiângulo.
  - c) Todo triângulo equilátero é isósceles.
  - d) Todo triângulo acutângulo é equilátero.
  - e) Nenhum triângulo retângulo é equilátero.

**ELEMENTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO**

**1. PROPRIEDADES DOS ÂNGULOS DE UM TRIÂNGULO (RESUMO)**

Num triângulo ABC qualquer temos:

$$\hat{A} + \hat{A}_{EX} = \hat{B} + \hat{B}_{EX} = \hat{C} + \hat{C}_{EX} = 180^{\circ}$$

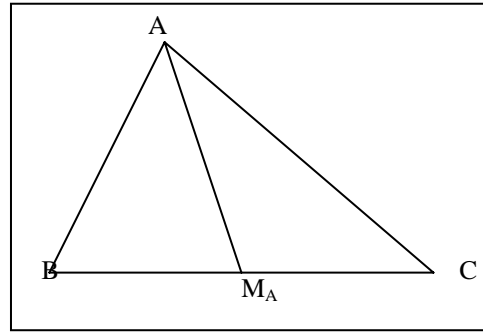
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^{\circ}$$

$$\hat{A}_{EX} = \hat{B} + \hat{C}; \hat{B}_{EX} = \hat{A} + \hat{C} \quad \text{e} \quad \hat{C}_{EX} = \hat{A} + \hat{B}$$

$$\hat{A}_{EX} + \hat{B}_{EX} + \hat{C}_{EX} = 360^{\circ}$$

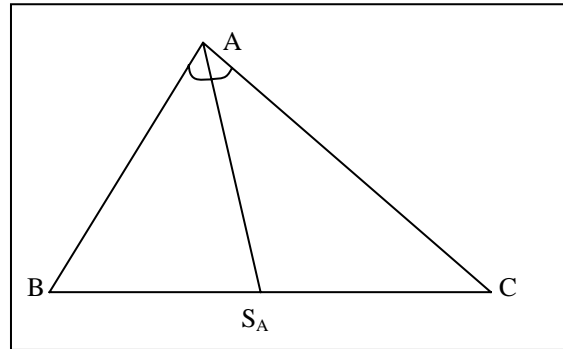
## 2. MEDIANA

**Mediana de um triângulo** é o segmento de reta que tem uma extremidade num dos vértices do triângulo e a outra no ponto médio do lado oposto a esse vértice.



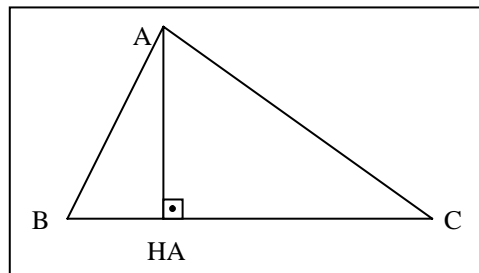
## 3. BISSETRIZ

**Bissetriz de um triângulo** é o segmento de reta determinado por um vértice do triângulo e pela intersecção do lado oposto a esse vértice com a bissetriz do ângulo interno desse vértice.



## 4. ALTURA

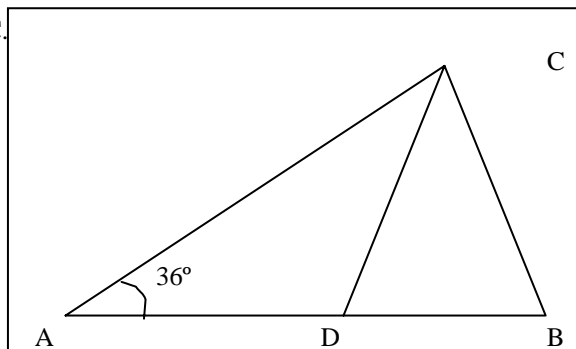
Altura de um triângulo é o segmento de reta determinado por um vértice e pela intersecção da reta que contém o lado oposto a esse vértice, com a perpendicular a ela, traçada por esse vértice.



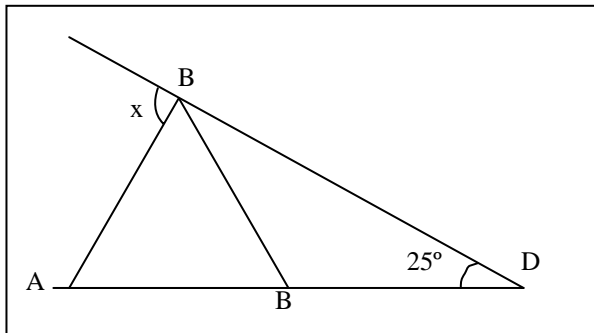
## EXERCÍCIOS DA AULA

- a) (FUVEST) - Um avião levanta vôo para ir da cidade A à cidade B, situada a 500 km de distância. Depois de voar 250 km em linha reta o piloto descobre que a rota está errada e, para corrigi-la, ele altera a direção do vôo de um ângulo de  $90^\circ$ . Se a rota não tivesse sido corrigida, a que distância ele estaria de B após ter voado os 500 km previstos?
- b) (FUVEST) - Na figura abaixo  $AB = AC$ ,  $CB = CD$  e  $\hat{A} = 36^\circ$ .

1. Calcule os ângulos DCB e ADC.
2. Prove que  $AD = BC$



- c) Calcule  $x$ , com os dados da figura seguinte, onde  $AB = BC = CD$  e  $\text{med}(\angle CDB) = 25^\circ$ .



- d) Na figura seguinte tem-se  $AB = BC = CD = DE = EF$ . Determine a medida do ângulo  $CAB$ , dado que a medida do ângulo  $DEF$  é igual a  $20^\circ$ .
- e) Sendo  $O$  o centro da circunferência da figura seguinte, prove que a medida do ângulo  $ABC$  é igual a  $90^\circ$ .

## TRIÂNGULO RETÂNGULO E CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE UM TRIÂNGULO

### 1. PROPRIEDADE IMPORTANTE DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Se um triângulo está **inscrito** numa circunferência e um de seus lados é um **diâmetro** então o triângulo é **retângulo**.

a)  $\overline{AO} \cong \overline{BO} \cong \overline{CO}$  (raio da circunferência)

b)  $\hat{A}BO \cong \hat{B}AO$  pois  $\triangle AOB$  é isósceles

c)  $\hat{A}CO \cong \hat{C}AO$  pois  $\triangle AOC$  é isósceles

d) no triângulo  $ABC$  temos:

$$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180^\circ \Leftrightarrow 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \boxed{\hat{B}AC = 90^\circ}$$

### 2. CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DO TRIÂNGULO

A condição necessária e suficiente para existir um triângulo é que a medida de cada um de seus lados seja menor que a soma das medidas dos outros dois.

Se  $a$ ,  $b$  e  $c$  forem, respectivamente, as medidas dos lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$  do triângulo  $ABC$  então:

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{cases}$$

## EXERCÍCIOS DA AULA

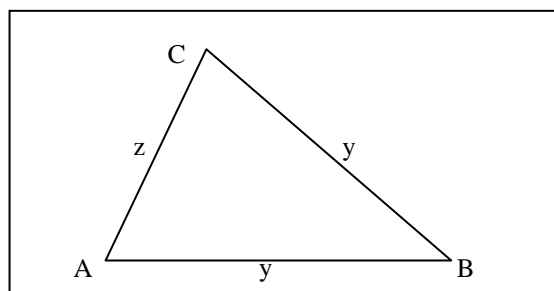
- a) Um triângulo retângulo é tal que um de seus ângulos agudos mede  $20^\circ$ . Determinar o ângulo entre a altura e a mediana relativa à hipotenusa do triângulo.
- b) A altura e a mediana relativas à hipotenusa de um triângulo retângulo formam um ângulo de  $40^\circ$ . Calcular o ângulo agudo entre esta altura e a bissetriz do maior ângulo agudo do triângulo.

- c) No triângulo  $ABC$  da figura seguinte tem-se:

$AB = x$ ,  $BC = y$ , e  $AC = z$ .

Qual das afirmações abaixo é falsa?

1.  $x < y + z$
2.  $y < x + z$
3.  $z < x + y$
4.  $|y - z| < x < y + z$
5.  $x + y < z$



- d) Se  $x \in \mathbb{N}$  e os números  $x - 1$ ,  $2x + 1$  e  $10$  são as medidas dos lados de um triângulo, então o número de possíveis valores de  $x$  é:  
 a) 3    b) 4    c) 5    d) 6    e) 7
- e) As medidas dos três lados de um triângulo estão em P.A. de razão  $r > 0$ . Se  $a$  é a medida do menor lado, então:  
 a)  $r = 3a$     b)  $r = 2a$     c)  $r = a$     d)  $r < a$     e)  $r > a$

## CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

### 1. DEFINIÇÃO

Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência entre os vértices de um e os do outro, de modo que os lados e os ângulos correspondentes sejam, respectivamente, congruentes.

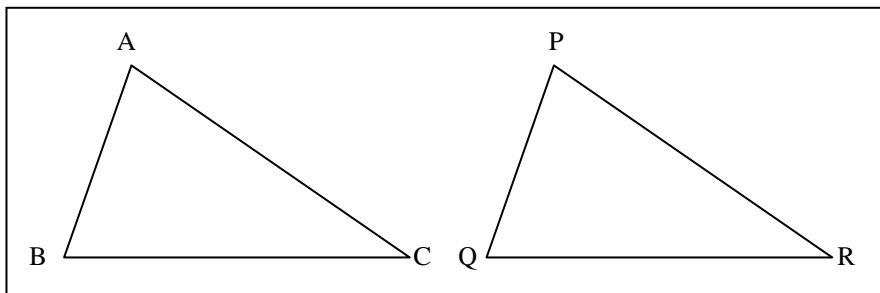
### 2. CRITÉRIOS DE CONGRUÊNCIA

A definição de congruência exige a congruência dos seis elementos, enquanto que os critérios de congruência nos permitem concluir que dois triângulos são congruentes, a partir da congruência dos três elementos convenientes.

Temos quatro critérios de congruência de triângulos:

#### 1º Critério: LLL

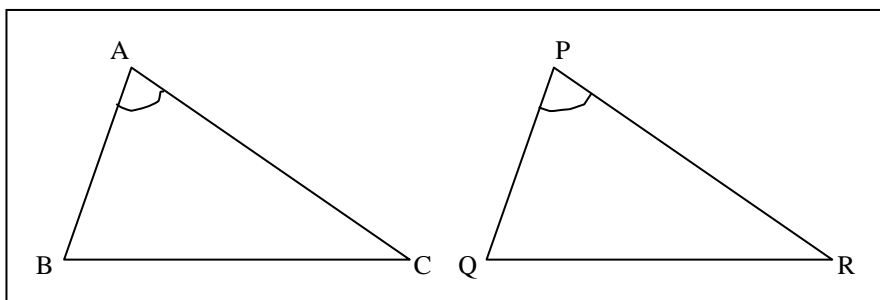
Dois triângulos são congruentes quando possuem os três lados respectivamente congruentes.



$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{PQ} \\ \overline{AC} \cong \overline{PR} \\ \overline{BC} \cong \overline{QR} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle PQR$$

#### 2º Critério: LAL

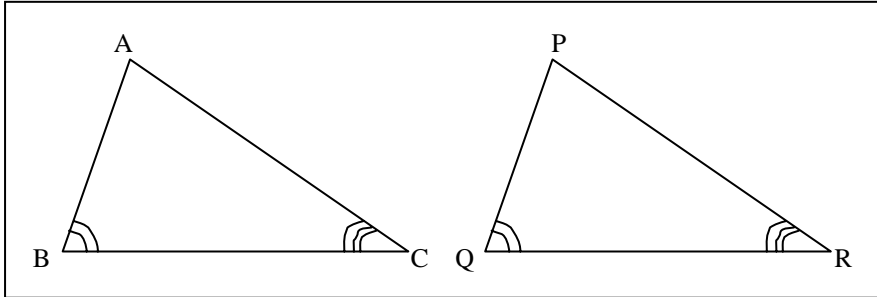
Dois triângulos são congruentes quando possuem dois lados e o ângulo entre eles, respectivamente, congruentes.



$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{PQ} \\ \overline{AC} \cong \overline{PR} \\ \hat{A} \cong \hat{P} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta PQR$$

### 3º Critério: ALA

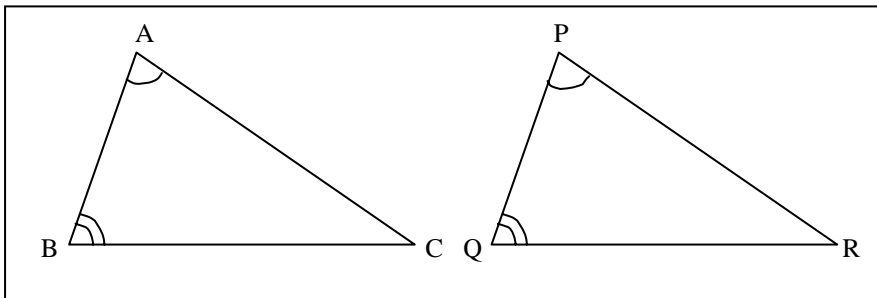
Dois triângulos são congruentes quando possuem dois ângulos e o lado entre eles, respectivamente, congruentes.



$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{PQ} \\ \overline{AC} \cong \overline{PR} \\ \hat{C} \cong \hat{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta PQR$$

### 4º Critério: LAAo

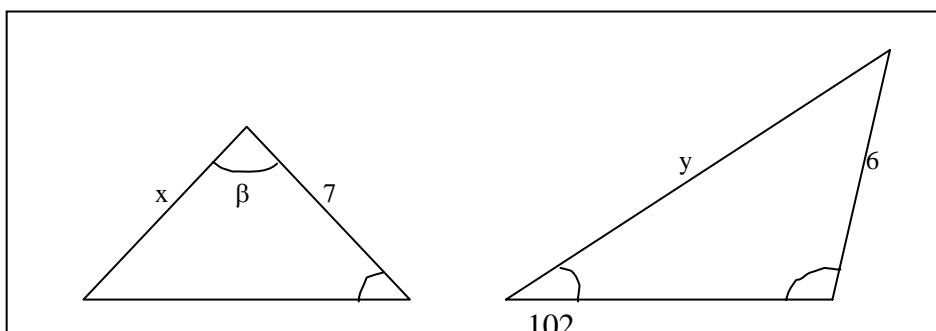
Dois triângulos são congruentes quando possuem um lado, um ângulo e o ângulo oposto a esse lado, respectivamente, congruentes.



$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{PQ} \\ \overline{AC} \cong \overline{PR} \\ \hat{A} \cong \hat{P} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta PQR$$

## EXERCÍCIOS DA AULA

- Cite os critérios de congruência de triângulos.
- Com os dados da figura seguinte calcule x e y.



$\alpha$  $\alpha$ 

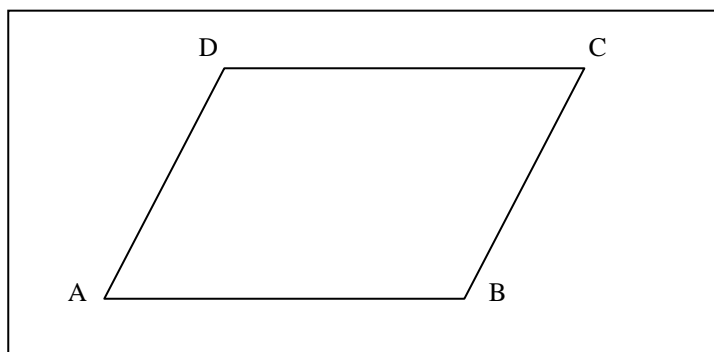
7

 $\beta$ 

c) Demonstre que num triângulo isósceles os ângulos opostos aos lados congruentes são também congruentes.

d) No quadrilátero ABCD da figura seguinte tem-se:

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  e  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ . Prove que  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$  e  $\overline{BC} \cong \overline{DA}$ .



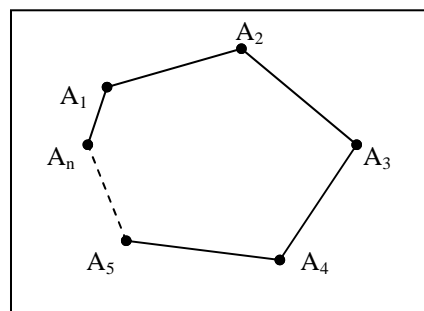
## POLÍGONOS

### 1. DEFINIÇÃO

Consideraremos, num plano,  $n$  pontos ( $n \geq 3$ ),  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , ordenados de modo que três consecutivos não sejam colineares.

Chama-se polígono  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  à figura formada pela união dos  $n$  segmentos consecutivos:

$$\overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \overline{A_3A_4} \cup \dots \cup \overline{A_nA_1}$$



#### Região Poligonal

É a região determinada pela união do polígono com os pontos de sua região interior.

#### Polígono convexo

É o polígono cuja região poligonal é convexa.

#### Observação:

Estudaremos somente polígonos convexos.

### 2. NOMENCLATURA

De acordo com o número de lados, temos:

triângulo	-	3 lados
quadrilátero	-	4 lados
pentágono	-	5 lados
hexágono	-	6 lados
heptágono	-	7 lados
octógono	-	8 lados
eneágono	-	9 lados
decágono	-	10 lados
undecágono	-	11 lados
dodecágono	-	12 lados
pentadecágono	-	15 lados
icoságono	-	20 lados

Genericamente utiliza-se o termo polígono de  $n$  lados.

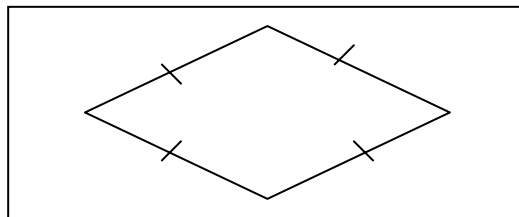
### 3. CLASSIFICAÇÃO

#### Polígono equilátero

É o polígono que tem todos os lados congruentes.

Exemplos:

Losango, quadrado, etc.

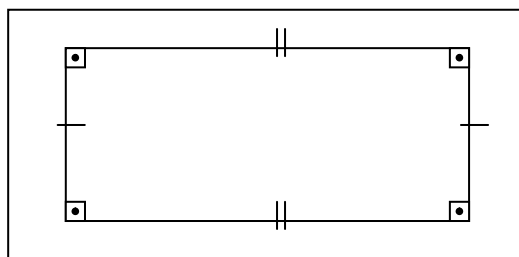


#### Polígono equiângulo

É o polígono que tem todos os ângulos internos congruentes.

Exemplos:

Retângulo, quadrado, etc.



#### Polígono regular

É o polígono que é equilátero e equiângulo simultaneamente.

Exemplo:

Quadrado.

### 4. NÚMERO DE DIAGONAIS

Chama-se diagonal de um polígono a todo segmento de reta cujas extremidades são vértices não consecutivos.

Num polígono de  $n$  lados:

1. cada vértice dá origem a  $(n - 3)$  diagonais.
2. os  $n$  vértices dão origem a  $n \cdot (n - 3)$  diagonais.
3. com este raciocínio, cada diagonal foi contada duas vezes, pois cada uma delas é determinada por dois vértices.

Assim, sendo  $d$  o número de diagonais do polígono temos:

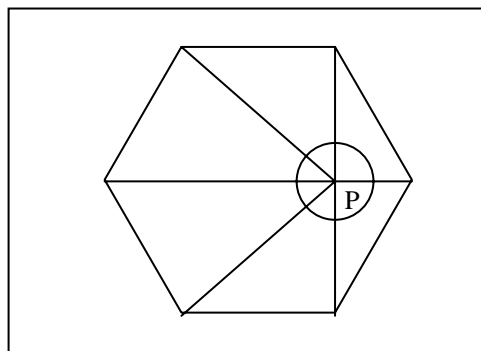
$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

### 5. SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS

Seja um polígono de  $n$  lados e  $P$  um ponto interno. Ligando  $P$  aos vértices obtemos  $n$  triângulos cuja soma dos ângulos internos é  $180^\circ n$ .

Assim, sendo  $S_i$  a soma dos ângulos internos do polígono, temos

$$S_i = 180^\circ \cdot n - 360^\circ \Rightarrow S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$$



### 6. SOMA DOS ÂNGULOS EXTERNOS

Sejam, num polígono de  $n$  lados,  $a_i$  e  $a_e$ , respectivamente, as medidas de um ângulo interno e do ângulo externo adjacente a ele,  $S_i$  a soma dos ângulos internos e  $S_e$  a soma dos ângulos externos.

Sendo  $a_i + a_e = 180^\circ$ , para cada um dos vértices do polígono, temos:

$$S_i + S_e = 180^\circ \cdot n \Leftrightarrow S_e = 180^\circ \cdot n - S_i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_e = 180^\circ \cdot n - (n - 2) \cdot 180^\circ \Leftrightarrow S_e = 360^\circ$$

Se o polígono for equiângulo, todos os ângulos internos são congruentes e todos os ângulos externos são congruentes e portanto

$$\boxed{a_i = \frac{S_i}{n}} \quad \text{e} \quad \boxed{a_e = \frac{S_e}{n}}$$

## EXERCÍCIOS

1. Calcule o número de diagonais de um eneágono convexo.
2. Qual o polígono convexo cujo número de diagonais é o dobro do número de lados?
3. A soma dos ângulos internos de um heptágono convexo é:
  - a)  $360^\circ$
  - b)  $540^\circ$
  - c)  $1400^\circ$
  - d)  $900^\circ$
  - e)  $180^\circ$
4. Qual a medida do ângulo interno de um hexágono regular?
5. Cada um dos ângulos internos de um polígono regular mede  $150^\circ$ . Qual é o número de lados do polígono?
6. Cada um dos ângulos externos de um polígono regular mede  $15^\circ$ . Quantas diagonais tem esse polígono?
7. Quantos lados tem um polígono convexo, cujo número de diagonais é **d** e a soma dos ângulos internos é  **$180^\circ \cdot d$** ?

## POLÍGONOS (Exercícios)

### RESUMO

Num polígono convexo de **n** lados sejam:  $a_i$  e  $a_e$ , respectivamente, as medidas de um dos ângulos internos e do ângulo externo adjacente a ele,  $S_i$  a soma dos ângulos internos,  $S_e$  a soma dos ângulos externos e **d** o número de diagonais.

Assim:

- a)  $a_i + a_e = 180^\circ$
  - b)  $S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$
  - c)  $S_e = 360^\circ$
  - d)  $d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$
  - e) Se o polígono for equiângulo temos:
 
$$a_i = \frac{S_i}{n} \quad \text{e} \quad a_e = \frac{S_e}{n}$$
1. Num polígono convexo a soma dos ângulos internos é cinco vezes a soma dos ângulos externos. Calcule o número de diagonais desse polígono.
  2. A soma dos ângulos internos de dois polígonos cujos números de lados são inteiros e consecutivos é  $1620^\circ$ . A soma das quantidades de diagonais destes polígonos é:
    - a) 9
    - b) 13
    - c) 17
    - d) 20
    - e) 23
  3. Num polígono regular ABCDE..., a diagonal ?? forma com o lado ?? um ângulo de  $18^\circ$ . Esse polígono possui:
    - a) 20 diagonais
    - b) 20 lados
    - c) 40 diagonais
    - c) 18 lados
    - e) 35 diagonais

## QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

Alguns quadriláteros que possuem propriedades particulares são chamados quadriláteros notáveis. Vamos estudar, a seguir, os quadriláteros notáveis e suas propriedades.

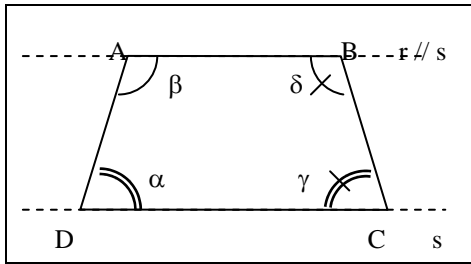
### 1. TRAPÉZIO

Trapézio é todo quadrilátero que possui dois lados paralelos.

Os lados AB e CD ( $AB \parallel CD$ ) são as bases do trapézio da figura.

Os lados AD e BC são chamados lados transversais ou lados transversos.

No trapézio, ângulos adjacentes a um mesmo lado transverso, são suplementares.



No trapézio da figura temos:

$$\alpha + \beta = 180^\circ \text{ e } \gamma + \delta = 180^\circ$$

Observação:

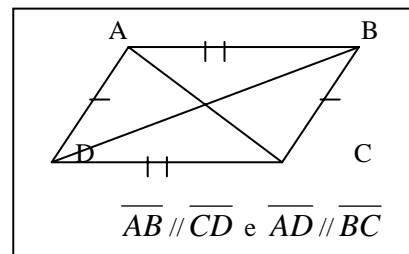
1. Trapézio isósceles é aquele que possui os lados transversais congruentes.
2. Trapézio retângulo é aquele que possui um ângulo reto.

## 2. PARALELOGRAMO

Paralelogramo é todo quadrilátero que possui lados opostos paralelos.

Nos paralelogramos valem as seguintes propriedades:

- a) os lados opostos são congruentes.
- b) os ângulos opostos são congruentes.
- c) as diagonais se cortam em seus respectivos pontos médios.

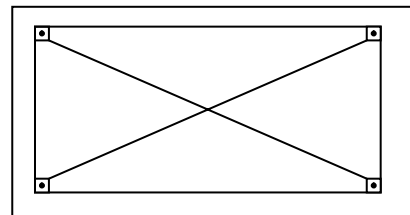


## 3. RETÂNGULO

Retângulo é todo paralelogramo que possui um ângulo reto.

Nos retângulos além das propriedades dos paralelogramos, valem as seguintes propriedades:

- a) as diagonais são congruentes.
- b) Os quatro ângulos são retos.

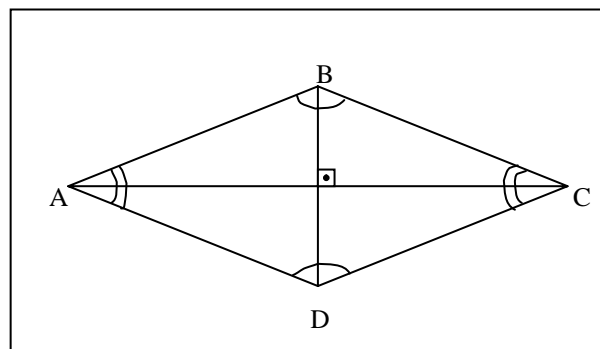


## 4. LOSANGO

Losango é todo paralelogramo que possui dois lados adjacentes congruentes.

Nos losangos, além das propriedades dos paralelogramos, valem as seguintes propriedades:

1. as diagonais estão nas bissetrizes dos ângulos internos.
2. As diagonais são perpendiculares
3. Os quatro lados são congruentes.



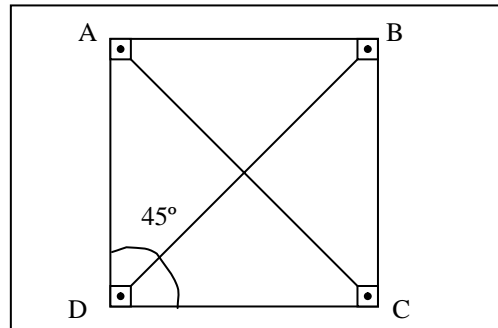
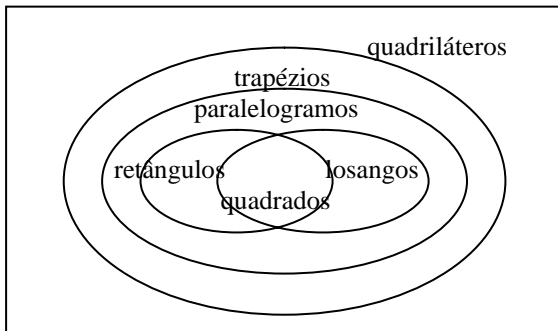
**APOSTILAS CURSO PRECURSOR**  
**CAXIAS DO SUL-RS ☎ 0xx54 211 4731**  
**MARINGÁ-PR ☎ 0xx44 228 0587 / 962 4021**

## 5. QUADRADO

Quadrado é todo quadrilátero que é retângulo e losango ao mesmo tempo.

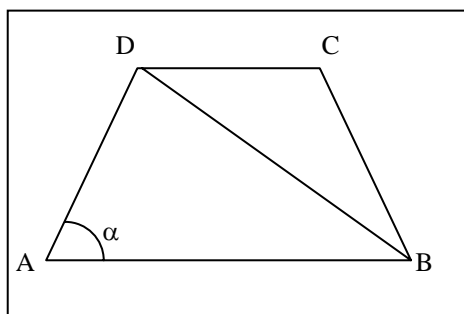
No quadrado valem todas as propriedades do retângulo e todas as propriedades do losango.

Relações de inclusão entre os conjuntos dos quadriláteros notáveis:



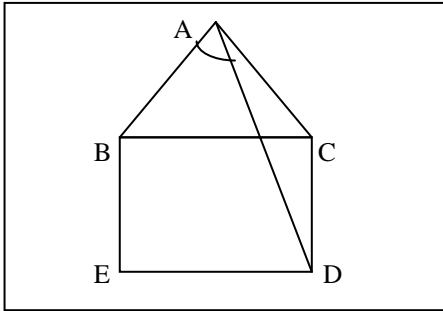
## EXERCÍCIOS

- a) Assinale a afirmação falsa.
- a) todo quadrado é retângulo
- b) todo quadrado é losango
- c) todo losango é um paralelogramo.
- d) todo retângulo é um paralelogramo.
- e) todo trapézio é um paralelogramo.
- b) Assinale a afirmação falsa.
- a) as diagonais de um paralelogramo interceptam-se no ponto médio.
- b) as diagonais de um losango são perpendiculares.
- c) as diagonais de um losango são bissetrizes dos ângulos internos.
- d) as diagonais de um retângulo são congruentes.
- e) as diagonais de um paralelogramo são congruentes.
- c) (PUC) - Num teste de múltipla escolha, propõe-se um problema que se refere a quadriláteros. As opções do teste são:
- a) paralelogramo      b) losango      c) retângulo
- d) quadrado            e) nenhuma das anteriores
- Um candidato descobre que a opção (e) é incorreta e que o teste possui uma única opção correta. Logo, o candidato, para acertar o teste, deverá assinalar a opção:
- a) a      b) b      c) c      d) d      e) e
- d) Determinar o menor ângulo de um paralelogramo, cuja diferença entre dois ângulos internos seja  $64^\circ$ .
- e) No trapézio ABCD da figura seguinte, tem-se  $AB = BD$  e  $BC = CD = DA$ . A medida  $\alpha$  do ângulo BAD assinalado é igual a:
- a)  $75^\circ$       b)  $72^\circ$       c)  $60^\circ$       d)  $45^\circ$       e)  $36^\circ$

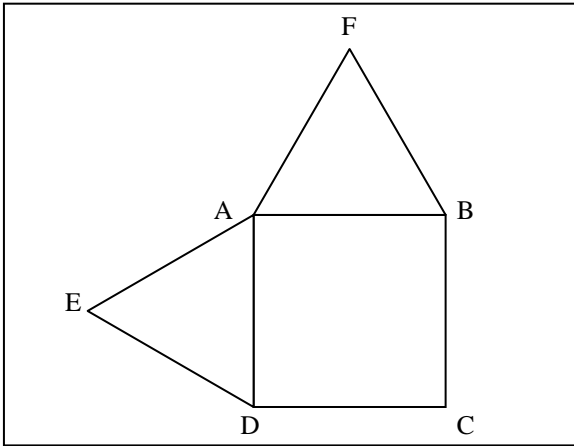


## EXERCÍCIOS

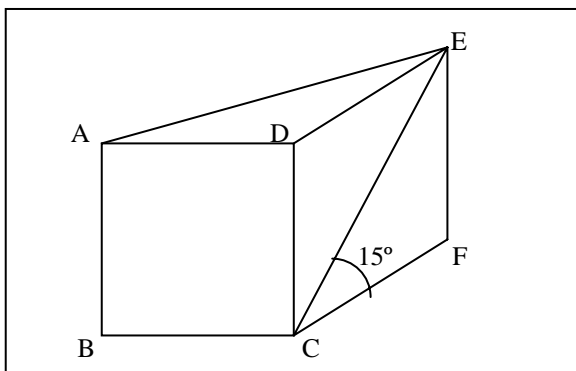
1. Calcule a medida do ângulo BAD assinalado na figura seguinte, onde ABC é um triângulo equilátero e BCDE é um quadrado.



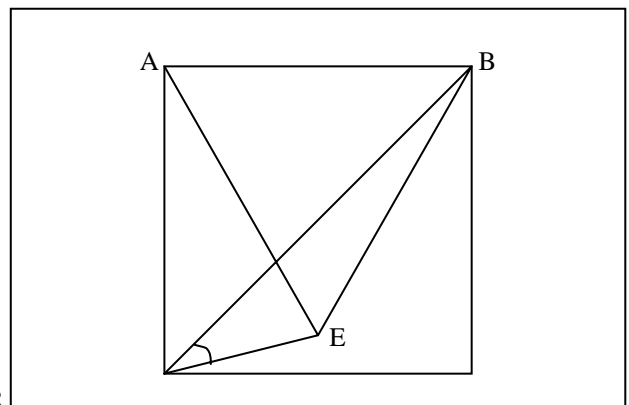
2. Na figura abaixo, ABCD é um quadrado e os triângulos ADE e ABF são equiláteros. A medida do ângulo FEA é:  
 a)  $5^\circ$     b)  $10^\circ$     c)  $15^\circ$     d)  $20^\circ$     e)  $25^\circ$



3. Na figura, ABCD é um quadrado e CDEF um losango. Se ECF mede  $15^\circ$ , a medida do ângulo AEF é:  
 a)  $15^\circ$     b)  $30^\circ$     c)  $45^\circ$     d)  $60^\circ$     e)  $75^\circ$



4. Com os dados da figura seguinte, onde ABCD é um quadrado e ABE é um triângulo equilátero, calcule a medida do ângulo BDE.



D

C

5. (MACK) - Num quadrilátero convexo, a soma de dois ângulos internos consecutivos mede  $190^\circ$ . O maior dos ângulos formado pelas bissetrizes internas dos dois ângulos mede:  
 a)  $105^\circ$  b)  $100^\circ$  c)  $90^\circ$  d)  $95^\circ$  e)  $85^\circ$

## LINHAS PROPORCIONAIS

### 1. FEIXE DE RETAS PARALELAS

É todo conjunto de três ou mais retas coplanares e paralelas entre si.

### 2. TRANSVERSAL

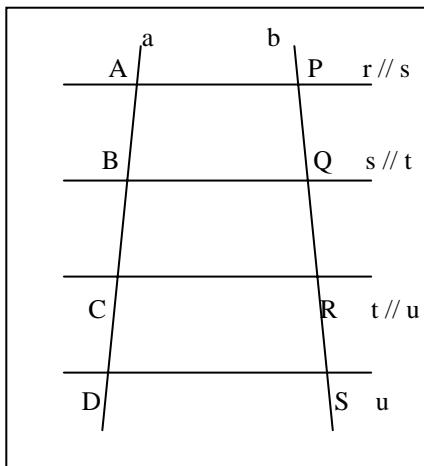
É qualquer reta que intercepta todas as retas de um feixe de paralelas.

### 3. SEGMENTOS CORRESPONDENTES

Dois segmentos são chamados correspondentes, quando são determinados pela intersecção de duas transversais com um mesmo par de retas paralelas de um feixe de paralelas.

### 4. TEOREMA DE TALES

Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre as medidas de dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre as medidas dos segmentos correspondentes da outra.



Assim, na figura, temos:

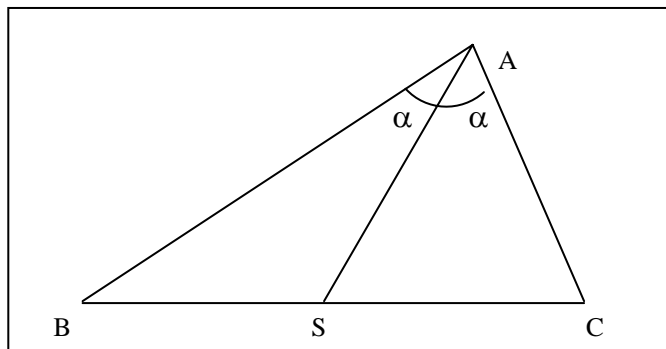
$$\frac{AB}{CD} = \frac{PQ}{RS} \text{ ou } \frac{AC}{BD} = \frac{PR}{QS} \text{ ou } \frac{AD}{AB} = \frac{PS}{PQ} \text{ ou...}$$


### 5. TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA

"Em todo triângulo, a bissetriz de um ângulo interno, determina no lado oposto dois segmentos proporcionais aos lados desse ângulo."

Na figura, temos:

$$\frac{AB}{BS} = \frac{AC}{CS}$$





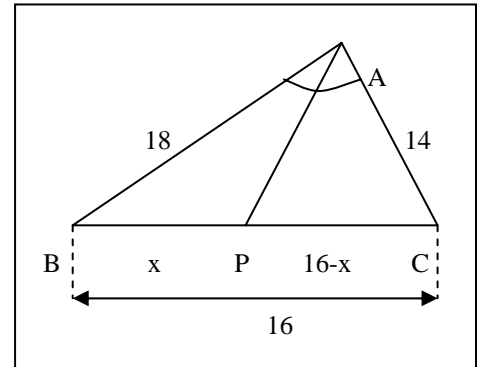
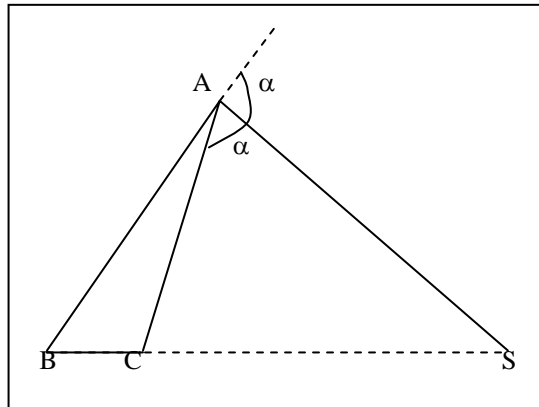
**APOSTILAS CURSO PRECURSOR**  
**CAXIAS DO SUL-RS ☎ 0xx54 211 4731**  
**MARINGÁ-PR ☎ 0xx44 228 0587 / 962 4021**

### 6. TEOREMA DA BISSETRIZ EXTERNA

Quando a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intercepta a reta que contém o lado oposto, ficam determinados nesta reta, dois segmentos proporcionais aos lados desse ângulo.

Na figura, temos:

$$\frac{AB}{BS} = \frac{AC}{CS}$$



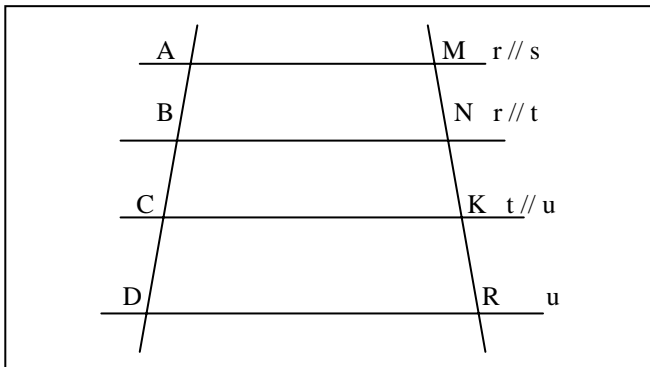
Do teorema da Bissetriz interna temos:

$$\frac{18}{x} = \frac{14}{16-x} \Rightarrow x = 9km$$

### EXERCÍCIOS

- Com os dados da figura, e de acordo com o Teorema de Tales, complete:

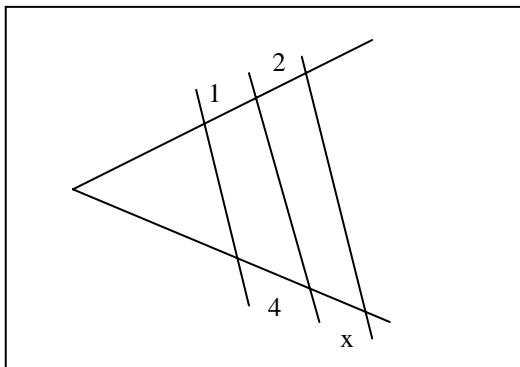
$$\frac{AB}{CD} = \frac{AC}{BD}, \frac{AC}{BD} = \frac{AB}{AD}$$



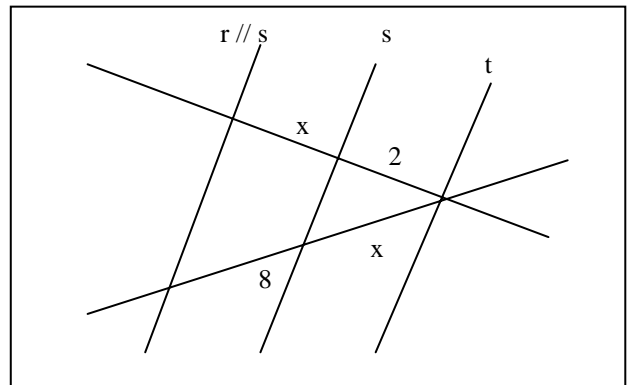
Nos exercícios de 2 a 4, de acordo com os dados das figuras, calcule x em cada caso e associe com:

- a) 1    b) 2    c) 4    d) 6    e) 8

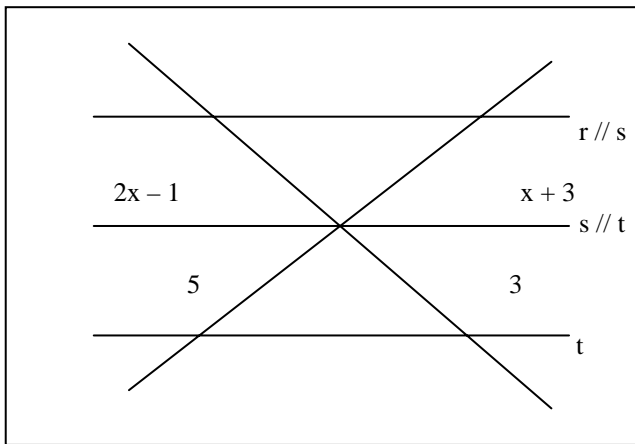
2.



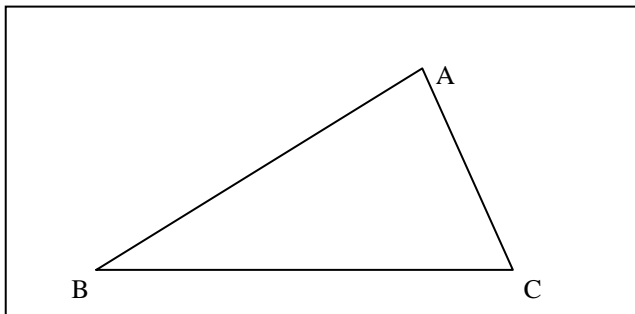
3.



4.



5. Enuncie e demonstre o teorema da bissetriz para um ângulo interno do triângulo ABC da figura.



6. Num triângulo ABC temos  $AB = 8$  cm,  $BC = 7$  cm e  $AC = 6$  cm. Sendo S o ponto de intersecção de BC com a bissetriz do ângulo interno A, determine BS.

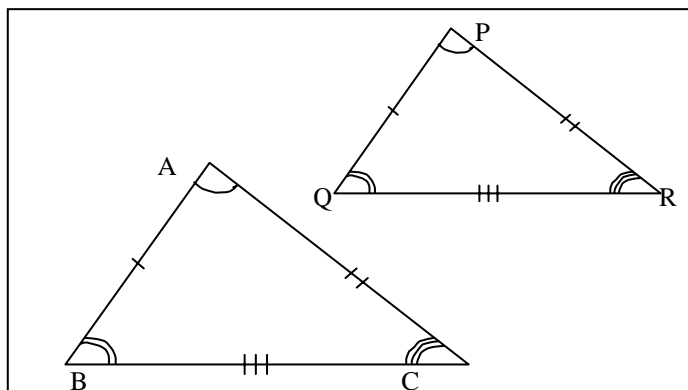
## SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

### 1. DEFINIÇÃO

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados correspondentes proporcionais.

A semelhança entre os triângulos ABC e PQR será simbolicamente indicada por:

$$\Delta ABC \approx \Delta PQR$$



Assim, temos:

$$\Delta ABC \approx \Delta PQR \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{P}; \hat{B} \cong \hat{Q}; \hat{C} \cong \hat{R} \\ \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = k \end{cases}$$

O número K é determinado razão de semelhança dos triângulos.

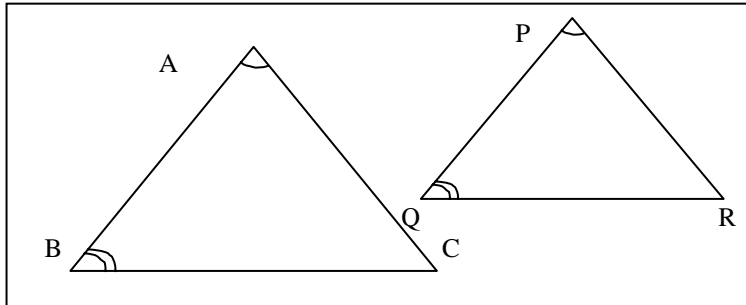
Se  $k = 1$ , então os triângulos são congruentes.

## 2. CRITÉRIOS DE SEMELHANÇA

Os critérios de semelhança, permitem concluir que dois triângulos são semelhantes a partir de duas ou três condições apenas.

### 1º Critério (AA~)

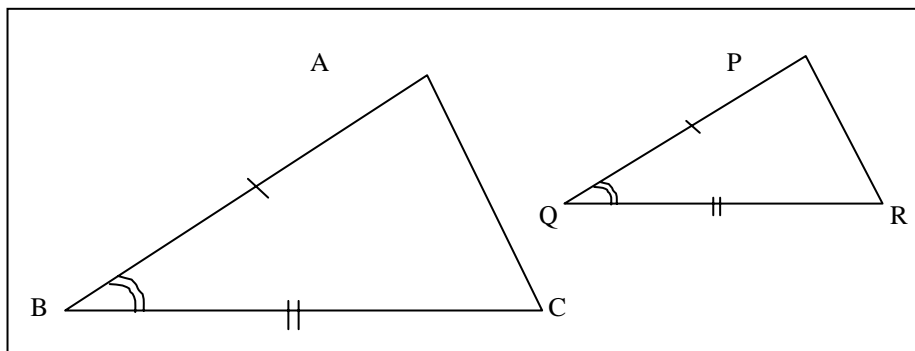
"Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então são semelhantes."



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} \cong \hat{P} \\ \hat{B} \cong \hat{Q} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \approx \Delta PQR$$

### 2º Critério (LAL~)

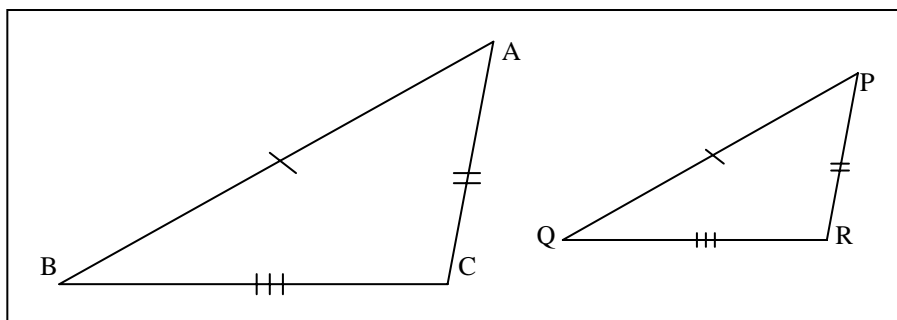
"Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes ordenadamente proporcionais e o ângulo compreendido entre esses lados congruente, então, os triângulos são semelhantes."



$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} \cong \hat{Q} \\ \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \approx \Delta PQR$$

### 3º Critério (LLL~)

"Se dois triângulos têm os três lados correspondentes ordenadamente proporcionais, então são semelhantes."



$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} \Rightarrow \Delta ABC \approx \Delta PQR$$

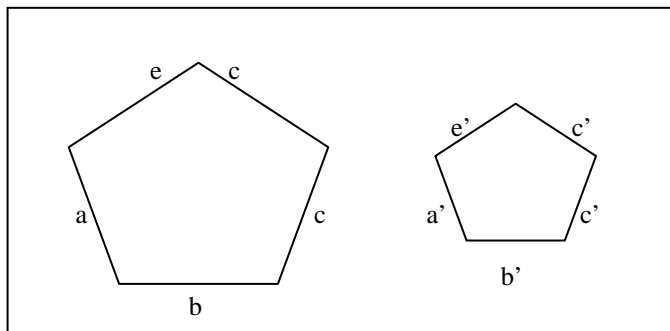
**Observação:** Se a razão de semelhança de dois triângulos é  $k$ , então a razão entre dois elementos lineares correspondentes quaisquer é  $k$ . Exemplo:

Se a razão de semelhança de dois triângulos é 2, então a razão entre as medidas correspondentes é 2, a razão entre as alturas correspondentes é 2, etc.

### 3. POLÍGONOS SEMELHANTES

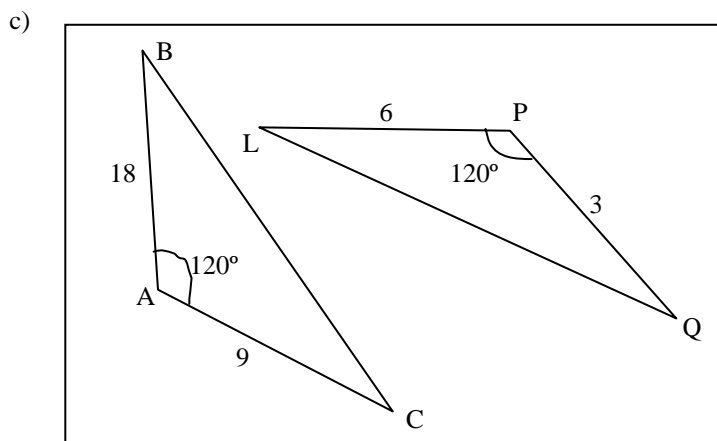
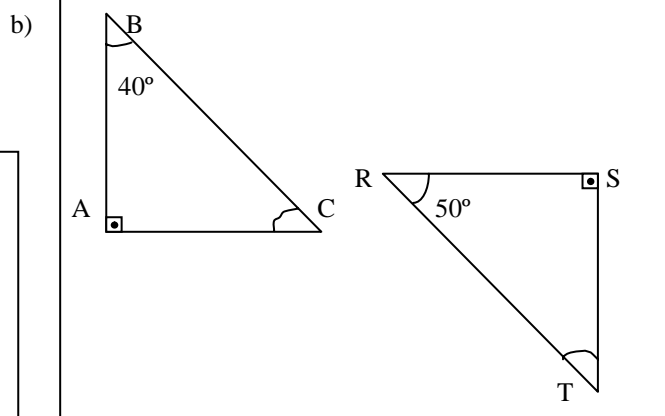
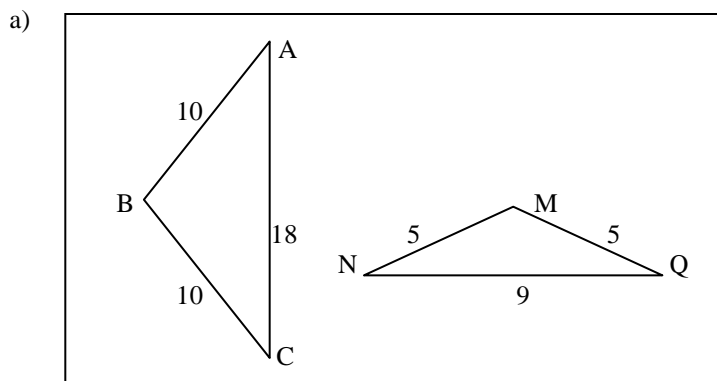
Dois polígonos são semelhantes quando possuem o mesmo número de lados e é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices tal que os ângulos correspondentes sejam congruos e os lados correspondentes proporcionais.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \dots = \frac{e}{e'} = k$$

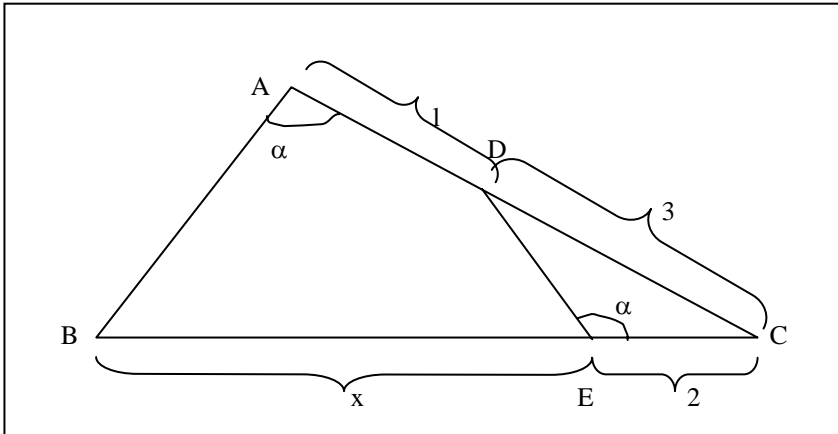


### EXERCÍCIOS

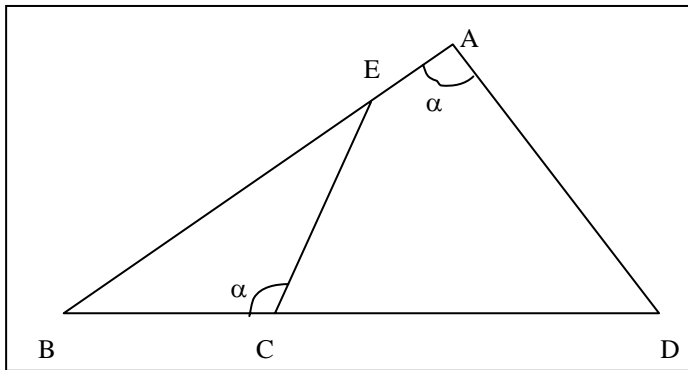
- Defina semelhança de triângulos.
- Cite os critérios de semelhança de triângulos.
- Escreva a semelhança dos triângulos apresentando os critérios de semelhança.



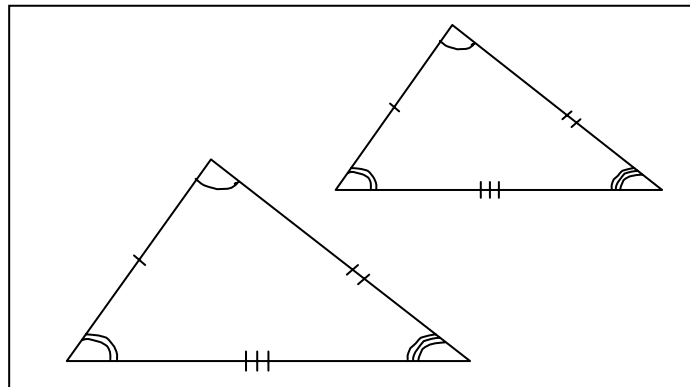
- Com os dados da figura, determine x.



- Na figura abaixo tem-se  $AE = 1$  cm,  $BC = 3$  cm e  $CD = 7$  cm. A medida em cm de  $\overline{BE}$  é:  
 a) 2      b) 3      c) 4      d) 5      e) 6

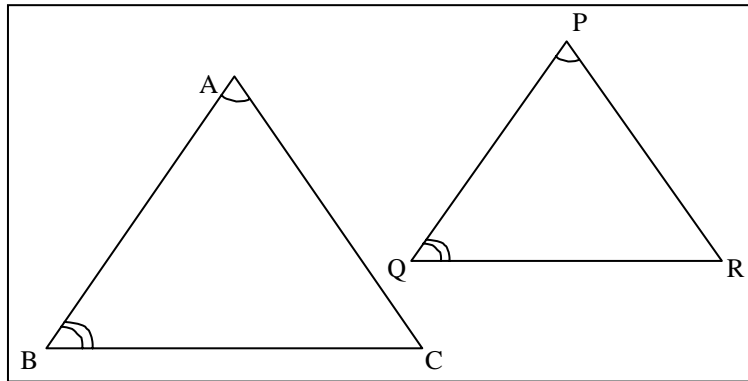


### SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS (RESUMO)



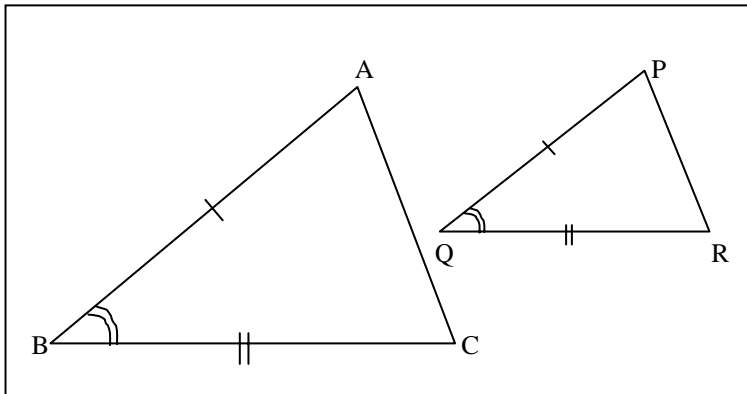
$$\Delta ABC \approx \Delta PQR \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{P}; \hat{B} \cong \hat{Q}; \hat{C} \cong \hat{R} \\ \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = k \end{cases}$$

**Cr terios de semelhança**  
**1  Cr terio (AA~)**



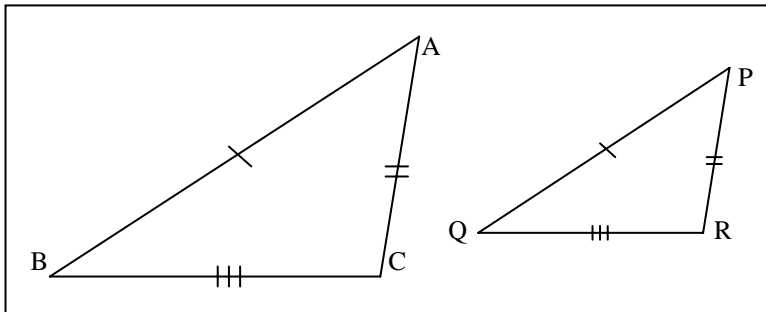
$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} \cong \hat{P} \\ \hat{B} \cong \hat{Q} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \approx \Delta PQR$$

**2  Cr terio (LAL~)**



$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} \cong \hat{Q} \\ \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \approx \Delta PQR$$

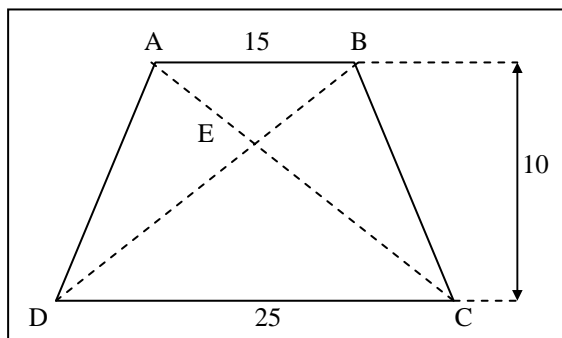
**3  Cr terio (LLL~)**



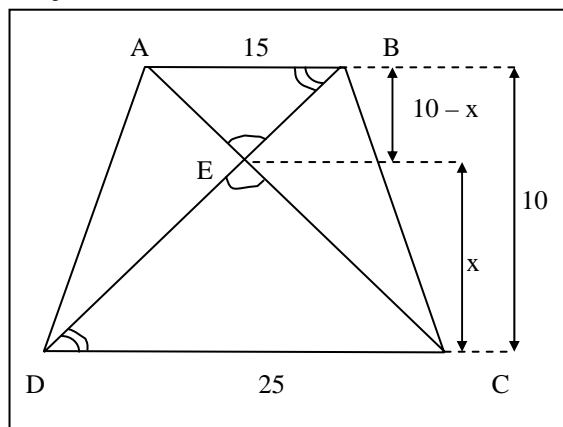
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} \Rightarrow \Delta ABC \approx \Delta PQR$$

**Aplica o:**

Calcular a altura relativa ao vértice E do triângulo ECD da figura, sabendo-se que o quadrilátero ABCD   um trapézio.



**Resolução:**



I)  $\triangle ABC \approx \triangle CDE$

II)  $\frac{x}{10-x} = \frac{25}{15} \Leftrightarrow \frac{x}{10-x} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 3x = 50 - 5x \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 8x = 50 \Leftrightarrow x = 6,25$

Resposta:

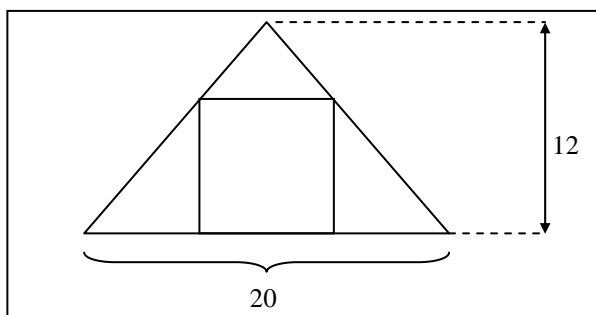
Altura relativa ao vértice E do triângulo ECD mede 6,25.

**Observações importantes:**

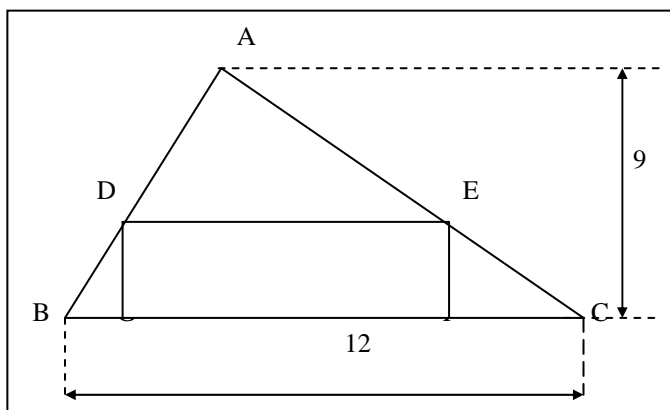
- Dois polígonos semelhantes podem ser decompostos no mesmo número de triângulos semelhantes.
- Em polígonos semelhantes, todas as medidas de segmentos correspondentes estão na mesma razão de semelhança.
- A razão entre os perímetros de dois polígonos semelhantes é igual a razão de semelhança entre polígonos.

### EXERCÍCIOS

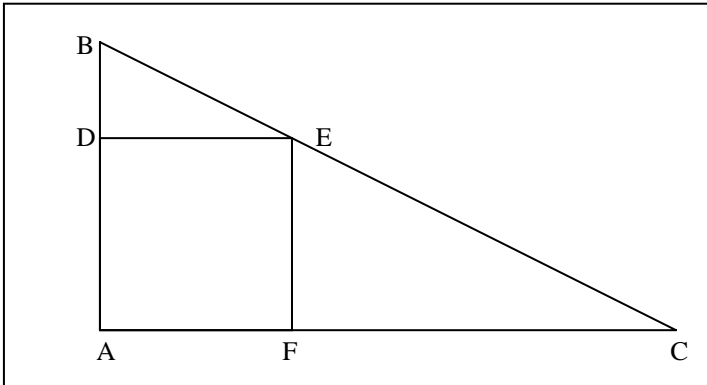
- A figura abaixo mostra um quadrado, inscrito num triângulo de base 20 cm e altura 12 cm. Calcule o lado desse quadrado.



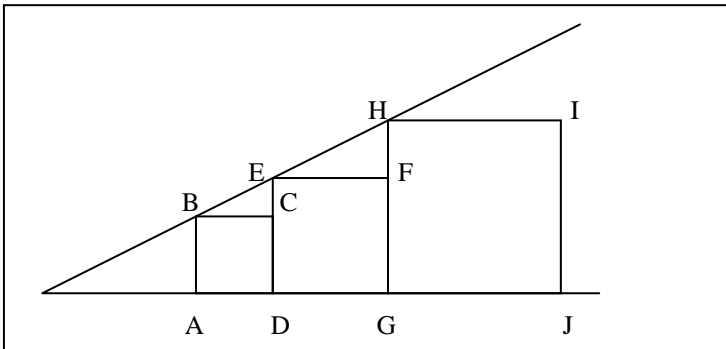
- Calcular a medida do lado GF do retângulo DEFG da figura abaixo, sabendo-se que  $GF = 2 \cdot EF$



- (FUVEST) - Na figura, o triângulo ABC é retângulo em A, ADEF é um quadrado,  $AB = 1$  e  $AC = 3$ . Quanto mede o lado do quadrado?  
a) 0,70 b) 0,75 c) 0,80 d) 0,85 e) 0,90



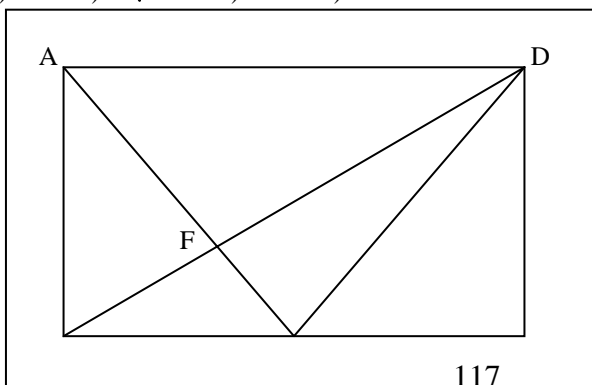
- Os lados dos quadrados DEFG e GHIJ da figura abaixo medem 6 cm e 9 cm, respectivamente. Calcular a medida do lado do quadrado ABCD.



- As bases de um trapézio ABCD medem 10 cm e 25 cm e a altura mede 70 cm. Determinar a distância do ponto de intersecção das diagonais à base maior.

### EXERCÍCIOS

- Demonstre que o segmento com extremos nos pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem por medida a metade da medida deste terceiro lado.
- As diagonais  $\overline{AB}$  e  $\overline{BD}$  de um quadrilátero medem, respectivamente, 8 cm e 12 cm. O perímetro do quadrilátero com extremos nos pontos médios dos lados do quadrilátero ABCD é:  
a) 12 cm    b) 16 cm    c) 20 cm  
d) 24 cm    e) 28 cm
- Num pentágono convexo ABCDE, a soma das medidas das diagonais é 48 cm. Calcular o perímetro do pentágono que tem como vértices os pontos médios dos lados do pentágono ABCDE.
- Na figura seguinte ABCD é um retângulo, E é o ponto médio de  $\overline{BC}$  e o triângulo ADE é equilátero. Se  $BC = 12$ , então EF é igual a:  
a)  $\sqrt{6}$     b) 3    c)  $2\sqrt{3}$     d) 4    e) 6

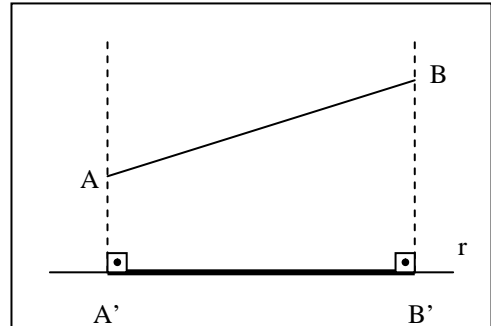


5. Num triângulo ABC, retângulo em A, os catetos medem 3 cm e 6 cm. A medida do raio da circunferência, com centro na hipotenusa e tangente aos catetos do triângulo é:
- a) 1 cm      b) 1,5 cm      c) 2 cm  
d) 2,5 cm    e) 3 cm

## RELAÇÕES MÉTRICAS NOS TRIÂNGULOS

### 1. PROJEÇÃO ORTOGONAL DE UM SEGMENTO

Dados um segmento de reta  $\overline{AB}$  e uma reta  $r$ , chama-se projeção ortogonal de  $\overline{AB}$  sobre  $r$ , o segmento de reta  $\overline{A'B'}$ , determinado pela intersecção da reta  $r$ , com as retas que passam pelos pontos A e B e são perpendiculares a  $r$ .



### 2. ELEMENTOS DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

No triângulo retângulo ABC da figura, temos:

A, B e C são vértices;

a é a medida da hipotenusa  $\overline{BC}$ ;

b e c são as medidas dos catetos  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  respectivamente;

h é a medida da altura  $\overline{AH}$  relativa à hipotenusa;

m é a medida da projeção ortogonal  $\overline{BH}$  do cateto  $\overline{AB}$  sobre a hipotenusa;

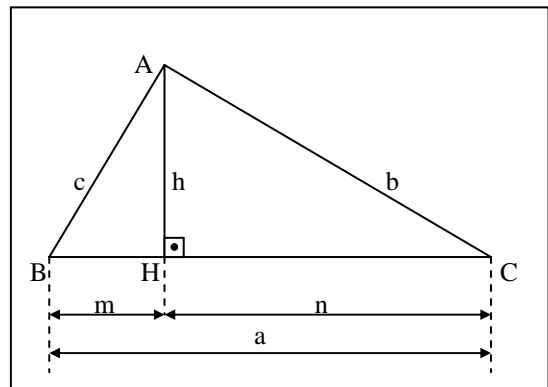
n é a medida da projeção ortogonal  $\overline{CH}$  do cateto  $\overline{AC}$  sobre a hipotenusa.

### 3. RELAÇÕES MÉTRICAS NUM TRIÂNGULO RETÂNGULO

No triângulo retângulo ABC da figura temos:

•  $\triangle AHB \sim \triangle CAB$  pelo critério (AA~) pois o ângulo  $\hat{B}$  é comum e  $\hat{A}HB = \hat{C}AB = 90^\circ$ .

•  $\triangle AHC \sim \triangle BAC$  pelo critério (AA~) pois o ângulo  $\hat{C}$  é comum e  $\hat{A}HC = \hat{B}AC = 90^\circ$ .



Da semelhança dos triângulos, obtêm-se as seguintes relações:

1) O quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção ortogonal deste cateto sobre a hipotenusa (**Relação de Euclides**).

Assim, temos:

$$c^2 = a.m \quad \text{e} \quad b^2 = a.n$$

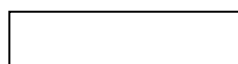
**Demonstrações**

$$I) \quad \triangle AHB \approx \triangle CAB \Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{BH}{BA} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Rightarrow c^2 = a.m$$

$$II) \quad \triangle AHC \approx \triangle BAC \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CH}{CA} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Leftrightarrow b^2 = a.n$$

2) Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos (**Teorema de Pitágoras**).

Assim, temos:



$$a^2 = b^2 + c^2$$

### Demonstração

Vamos somar membro a membro as relações de Euclides obtidas anteriormente.

$$\frac{\begin{cases} c^2 = a.m \\ b^2 = a.n \end{cases}}{b^2 + c^2 = a.m + a.n} \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a.(m+n) \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a.a \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

3) O quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Assim, temos:

$$h^2 = m.n$$

Demonstração

$$\triangle AHB \approx \triangle CHA \Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{HB}{HA} \Leftrightarrow \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Leftrightarrow h^2 = m.n$$

4) O produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas dos catetos.

Assim, temos:

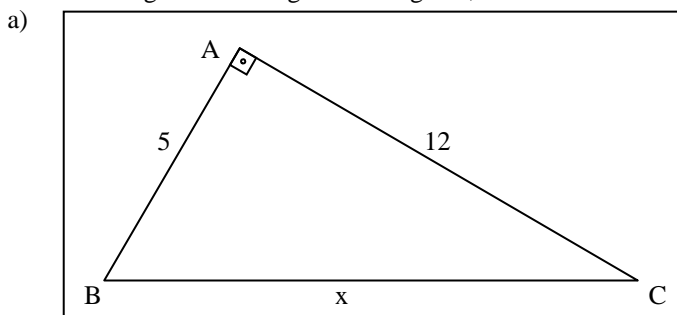
$$a.h = b.c$$

Demonstração

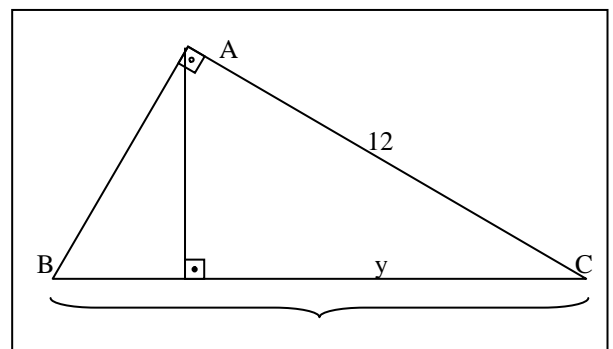
$$\triangle HAB \approx \triangle ACB \Rightarrow \frac{HA}{AC} = \frac{AB}{CB} \Leftrightarrow \frac{h}{b} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a.h = b.c$$

## EXERCÍCIOS

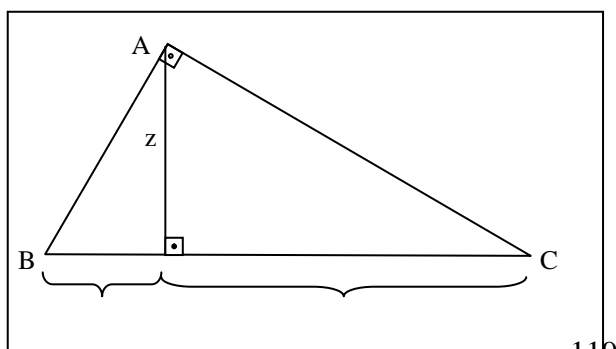
- Enuncie e demonstre o Teorema de Pitágoras.
- Sendo retângulos os triângulos das figuras, determine os valores de x, y e z.



b)

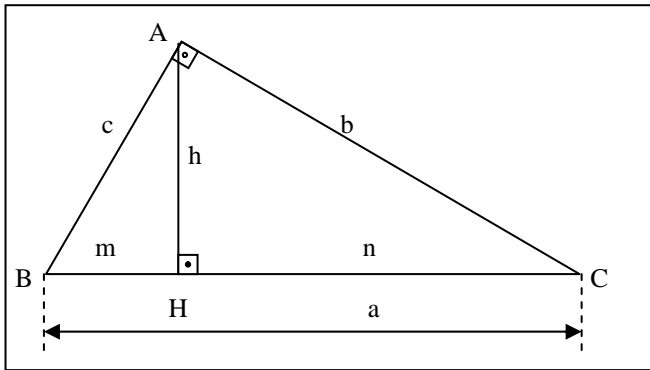


c)



## RELAÇÕES MÉTRICAS NOS TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

Elementos:



$\overline{BC}$  é a hipotenusa,

$\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  são os catetos,

$\overline{AH}$  é a altura relativa à hipotenusa,

$\overline{BH}$  e  $\overline{CH}$  são, respetivamente, as projeções dos catetos  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  sobre a hipotenusa.

Relações:

I) Os triângulos HBA e ABC são semelhantes pelo critério (AA~).

Assim:

$$\frac{HB}{AB} = \frac{BA}{BC} \Leftrightarrow \frac{m}{c} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \boxed{c^2 = a.m}$$

II) Os triângulos HCA e ACB são semelhantes pelo critério (AA~).

Assim:

$$\frac{HC}{AC} = \frac{CA}{CB} \Leftrightarrow \frac{n}{b} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \boxed{b^2 = a.n}$$

O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos (**Teorema de Pitágoras**).

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Os triângulos HBA e HAC são semelhantes pelo critério (AA~)

Assim:

$$\frac{HB}{AC} = \frac{HA}{HC} \Leftrightarrow \frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Leftrightarrow \boxed{h^2 = m.n}$$

Os triângulos HBA e ABC são semelhantes pelo critério (AA~).

Assim:

$$\frac{HA}{AC} = \frac{BA}{BC} \Leftrightarrow \frac{h}{b} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \boxed{a.h = b.c}$$

### Natureza dos Triângulos

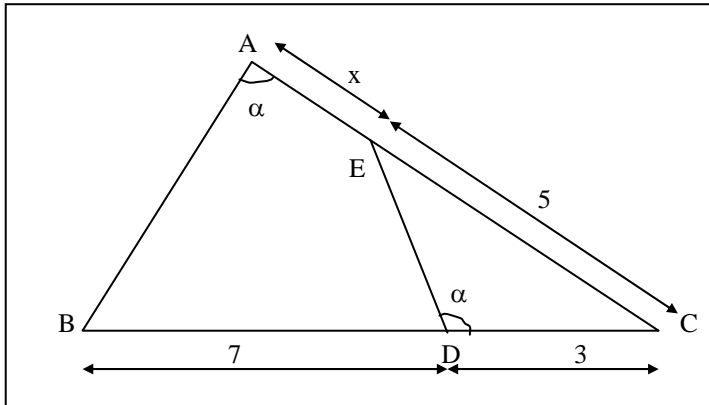
Sendo a, b e c as medidas dos lados de um triângulo e "a" a maior delas, tem-se:

- a)  $a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow$  triângulo acutângulo
- b)  $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$  triângulo retângulo

c)  $a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow$  triângulo obtusângulo

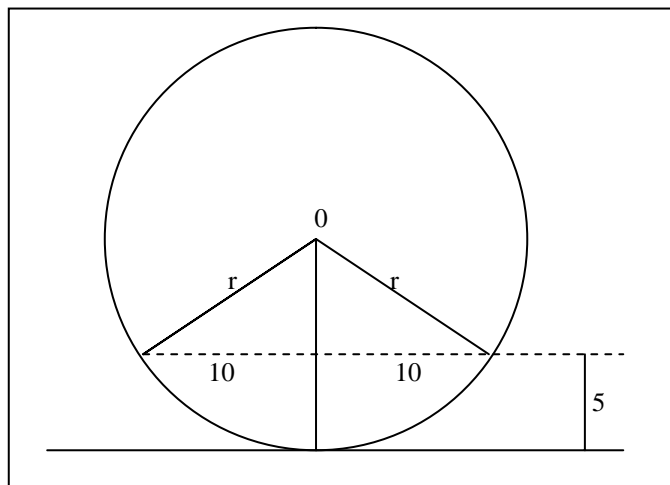
### EXERCÍCIOS

1- Com os dados da figura calcule x.



- 2- (FUVEST). Dois pontos materiais A e B deslocam-se com velocidades constantes sobre uma circunferência de raio  $r = \sqrt{8}$ , partindo de um mesmo ponto O. Se o ponto A se desloca no sentido horário com o triplo da velocidade de B, que se desloca no sentido anti-horário, então o comprimento da corda que liga o ponto de partida ao ponto do primeiro encontro é:  
 1 m    b) 2 m    c) 3 m    d) 4 m    e) 5 m

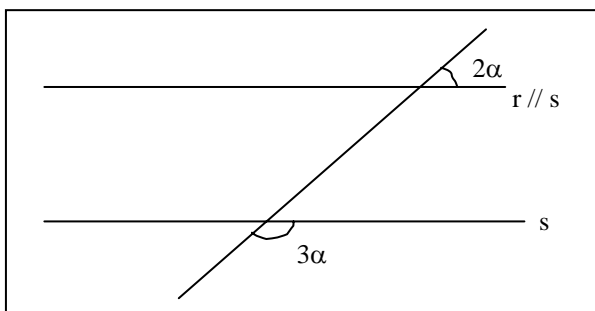
3- (FATEC) O valor do raio da circunferência da figura é:



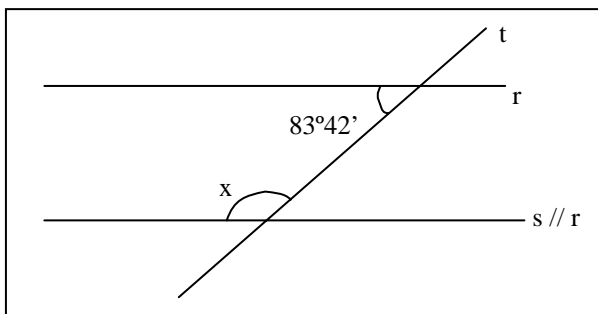
- 7,5  
 14,1  
 12,5  
 9,5  
 10,0

### EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Determine o valor de  $\alpha$ .

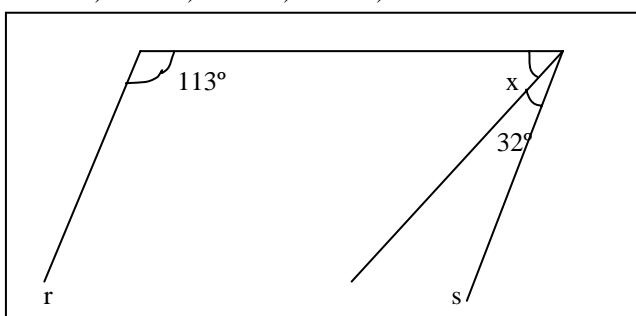


Na figura, calcular a medida x.

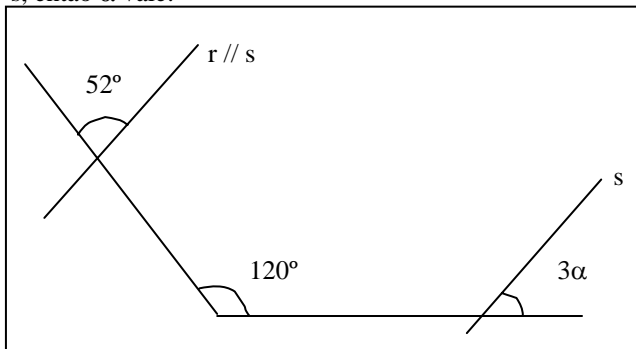


Se  $r // s$ , então x valerá:

- a)  $32^\circ$       b)  $33^\circ$     c)  $65^\circ$     d)  $43^\circ$     e) n.d.a.

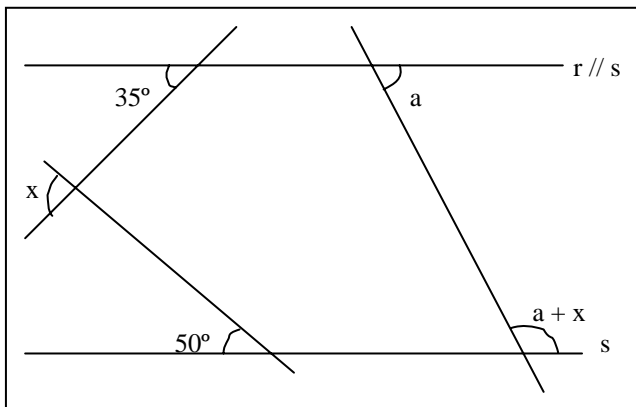


Se  $r // s$ , então  $\alpha$  vale:



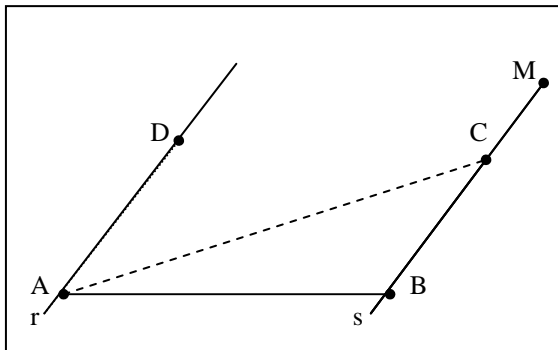
- a)  $90^\circ$       b)  $100^\circ$     c)  $110^\circ$     d)  $120^\circ$     e)  $22^\circ40'$

Com os dados fornecidos na figura abaixo, determine a medida de "a".



(SANTA CASA) Na figura,  $\vec{r} \parallel \vec{s}$  e  $\angle DAB = 60^\circ$ .  $\overline{AC}$  é bissetriz de  $\angle DAB$ . A medida  $\angle ACM$  é:

- a)  $40^\circ$     b)  $50^\circ$     c)  $60^\circ$     d)  $150^\circ$     e)  $120^\circ$

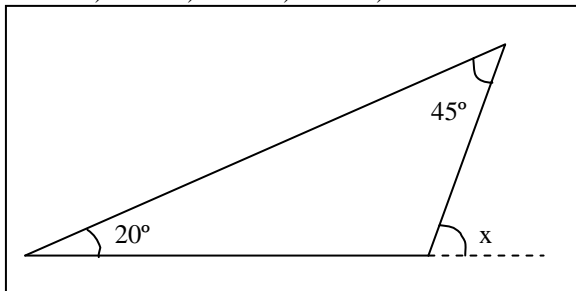


Os ângulos de um triângulo medem respectivamente:  $3x$ ,  $4x$  e  $5x$ . Então,  $x$  vale em graus:

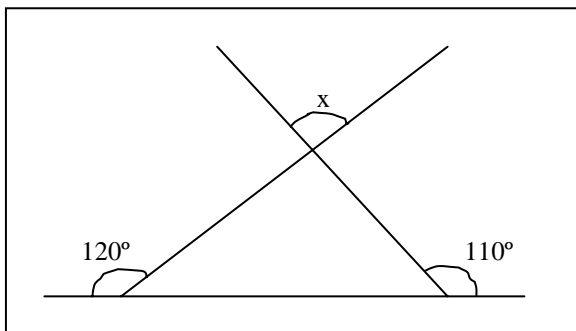
- a)  $125^\circ$     b)  $55^\circ$     c)  $35^\circ$     d)  $65^\circ$     e)  $15^\circ$

Determine o valor de  $x$  e associe com as alternativas abaixo:

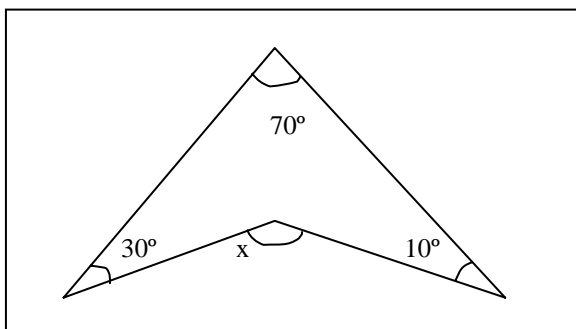
- a)  $44^\circ$     b)  $65^\circ$     c)  $70$     d)  $150^\circ$     e) n.d.a.



Calcule  $x$  na figura abaixo:

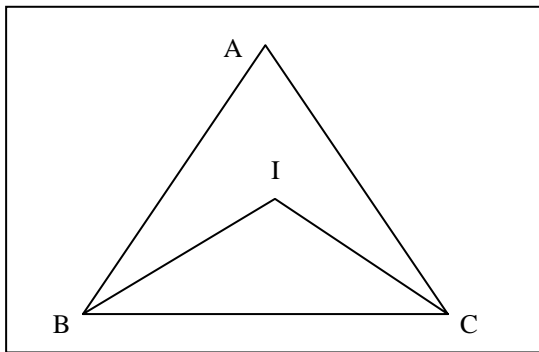


Determine o valor de  $x$  na figura abaixo.



No triângulo ABC da figura abaixo, BI e CI são bissetrizes dos ângulos internos B e C, e a medida do ângulo A é 40°. A medida do ângulo BIC é:

- a) 80°   b) 90°   c) 10°   d) 110°   e) 120°



### ÁREAS DAS FIGURAS PLANAS

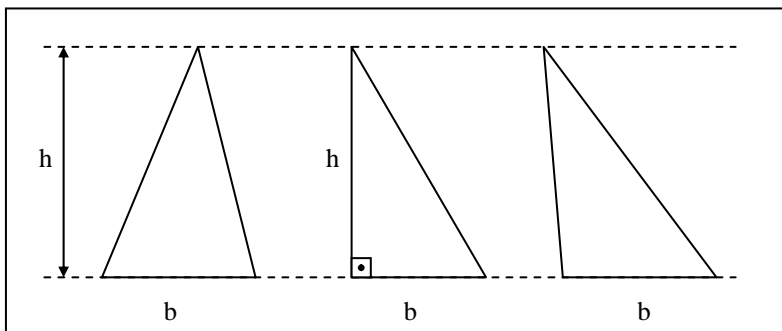
#### DEFINIÇÃO

Área de uma figura é um número, associado à sua superfície que exprime a relação existente entre esta e a superfície de um quadrado de lado unitário.

Dizemos que duas superfícies são equivalentes quando possuem a mesma área.

#### ÁREA DO TRIÂNGULO

Em função da base e da altura.



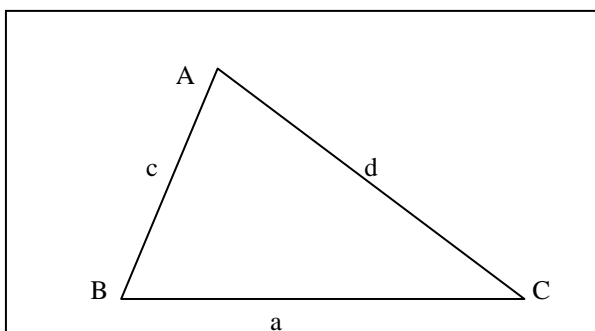
$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

Em função dos lados

Sejam **a**, **b** e **c** as medidas dos lados de um triângulo qualquer, sua área é dada por:

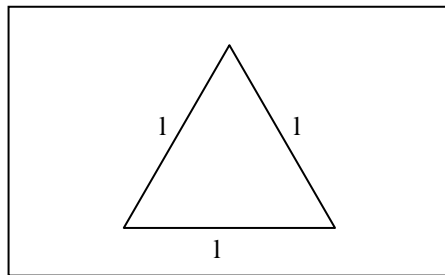
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{Fórmula de HIERÃO})$$

sendo:  $p = \frac{a+b+c}{2}$  (semiperímetro)

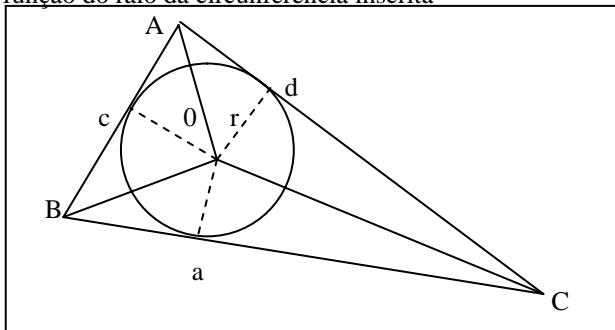


Se o triângulo é equilátero de lado  $l$ , então sua área é dada por:

$$S = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$$

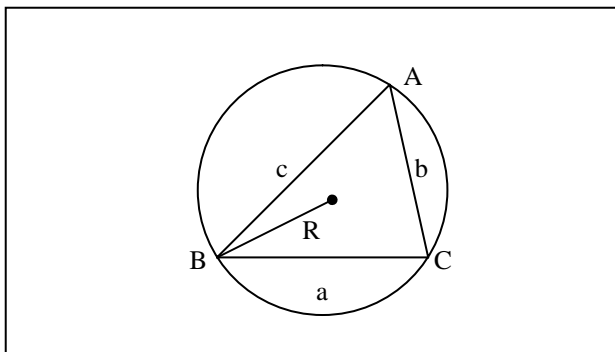


Em função do raio da circunferência inscrita



$$S = p \cdot r$$

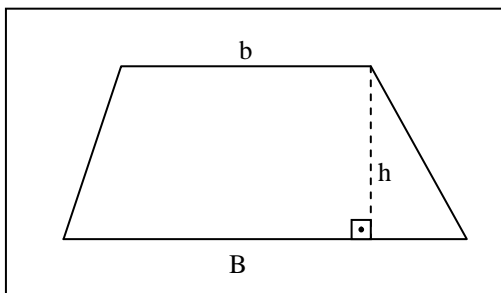
Em função do raio da circunferência circunscrita.



$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

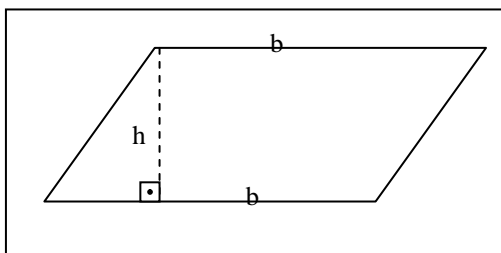
### ÁREA DOS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

#### TRAPÉZIO



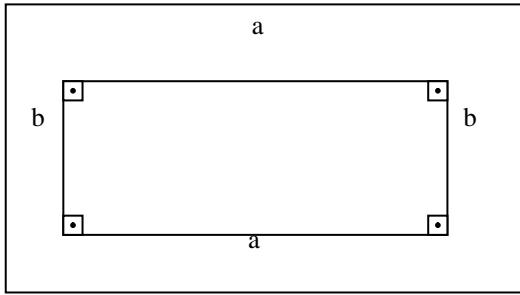
$$S = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

#### PARALELOGRAMO



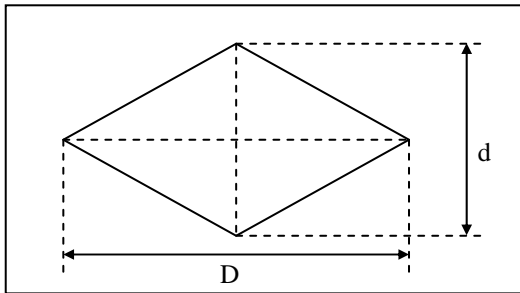
$$S = b \cdot h$$

## RETÂNGULO



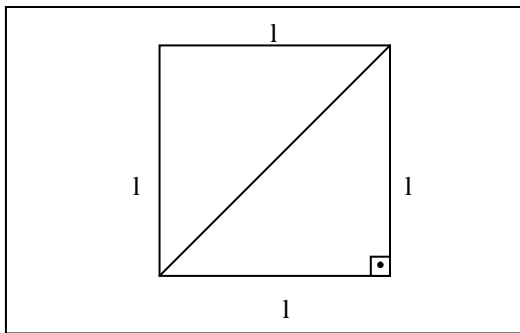
$$S = a.b$$

## LOSANGO



$$S = \frac{D.d}{2}$$

## QUADRADO

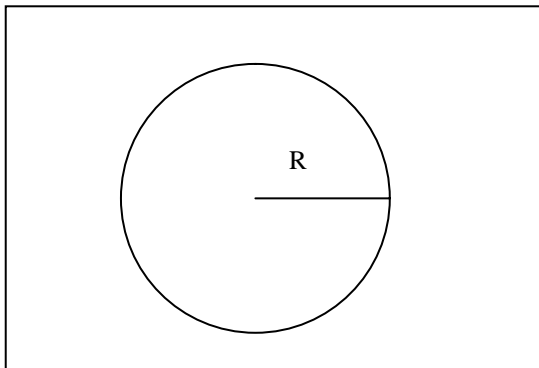


$$S = l^2 \text{ ou } S = \frac{d^2}{2}$$

## ÁREA DAS FIGURAS CIRCULARES

### Área do Círculo

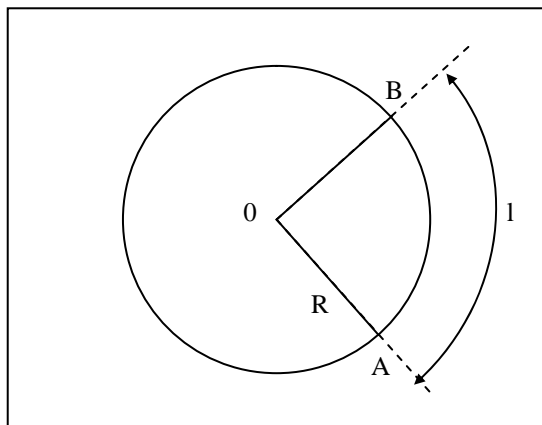
A área de um círculo de raio R é expressa por:  
 $S = \pi R^2$



O comprimento da circunferência de raio R é dado por:  
 $C = 2\pi R$ , onde  $\pi \cong 3,1416$

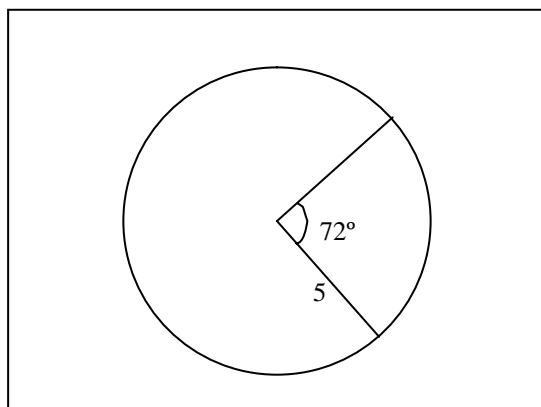
### Área do Setor Circular

A área do setor circular de raio  $R$  limitado por um arco de comprimento  $l$  é dada por:



**Obs:** A área do setor circular é sempre uma "fração" da área do círculo no qual o setor está "contido".

Exemplo: A área do setor circular da figura abaixo é dado por:



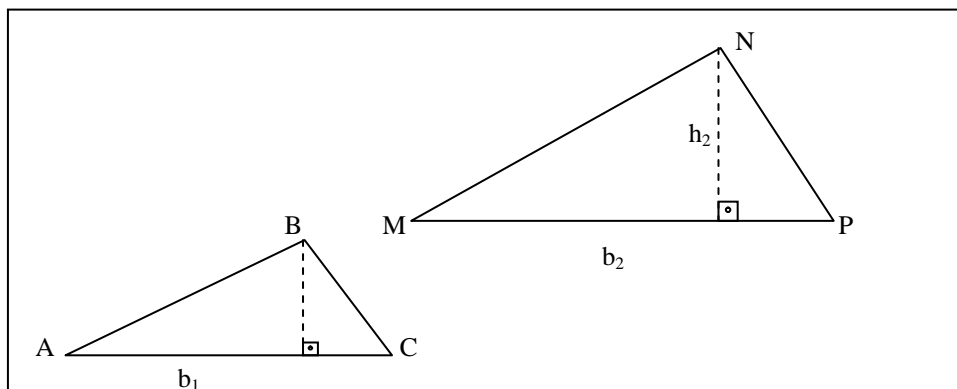
$$S = \frac{72^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 5^2 = 5\pi$$

**IMPORTANTE !!!**

### RAZÃO ENTRE ÁREAS DE FIGURAS SEMELHANTES

"A razão entre as áreas de duas superfícies semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança."

Exemplo: Se os triângulos  $ABC$  e  $MNP$  da figura forem semelhantes e tiverem áreas  $S_1$  e  $S_2$ , respectivamente, então:



## EXERCÍCIOS

(MACK) Dois lados de um triângulo medem 2 m, e  $\sqrt{3}$  m, sendo de  $60^\circ$  o ângulo entre eles. A área desse triângulo, em  $m^2$ , vale:

- a) 1      b)  $3/2$       c) 3      d)  $\sqrt{3}$       e) 9

(FUVEST) O triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio 5 cm. Sabe-se que A e B são extremidades de um diâmetro e que a corda BC mede 6 cm. Então a área do triângulo ABC, em  $cm^2$ , vale:

- a) 24      b) 12      c)  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$       d)  $6\sqrt{2}$       e)  $2\sqrt{3}$

## POLÍGONOS REGULARES

### DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

#### Polígono regular

É aquele cujos lados são respectivamente côngruos e cujos ângulos internos também são respectivamente côngruos.

#### Inscrição e Circunscrição

Todo polígono regular é inscritível e circunscritível a uma circunferência.

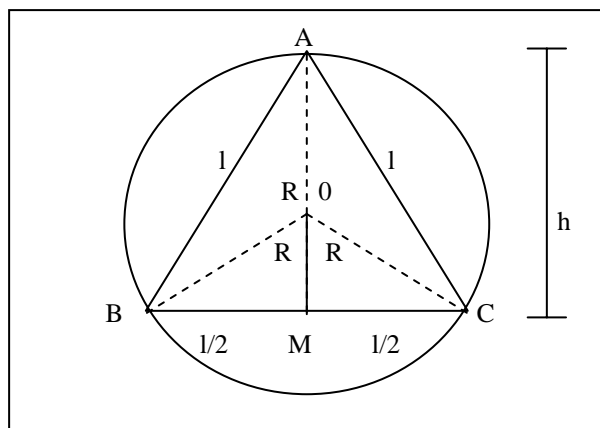
**Obs. :** O centro da circunferência inscrita (interna) e da circunscrita (externa) ao polígono são coincidentes.

#### Apótema do Polígono

É o segmento com extremos no centro e no ponto médio dos lados. Ele é perpendicularmente ao lado e é raio da circunferência inscrita.

### TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Sendo R o raio da circunferência circunscrita, l o lado e a o apótema de um triângulo equilátero, temos:



$\overline{AM}$  é altura do triângulo equilátero

$$ABC \Rightarrow h = AM \Rightarrow h = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Como O é o baricentro do triângulo ABC, temos

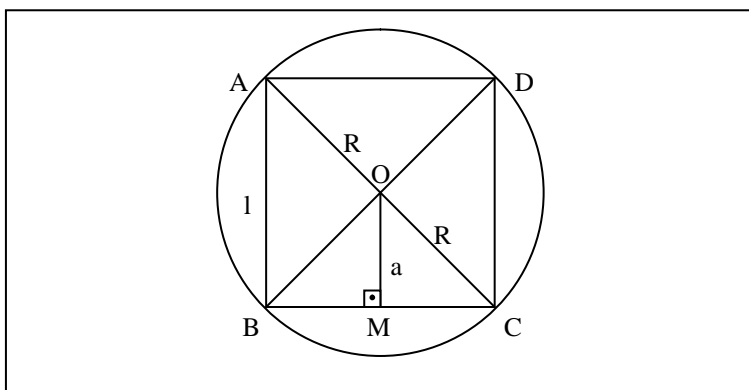
$$AO = 2 \cdot OM \Rightarrow R = 2 \cdot a \Rightarrow a = \frac{R}{2}$$

$$c) AM = AO + OM \Rightarrow \frac{l\sqrt{3}}{3} = 2a + a \Rightarrow a = \frac{l\sqrt{3}}{6}$$

$$d) AO = 2a.R \Rightarrow R = \frac{l\sqrt{3}}{3}$$

### QUADRADO

Sendo R o raio da circunferência circunscrita, l o lado e a o apótema do quadrado inscrito, temos:



$$a) \overline{AC} \text{ é a diagonal do quadrado } ABCD \Rightarrow AC = l\sqrt{2} \Rightarrow 2R = l\sqrt{2} \Rightarrow l = R\sqrt{2}$$

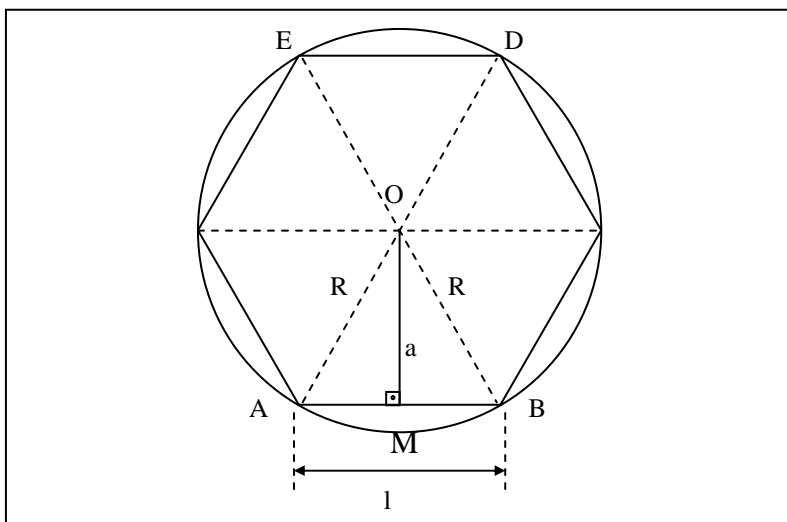
$$b) OM = \frac{AB}{2} \Rightarrow a = \frac{l}{2}$$

$$c) \text{ Como } a = \frac{l}{2} \text{ e } l = R\sqrt{2} \text{ temos: } a = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$d) R = \frac{l\sqrt{2}}{2}$$

### HEXÁGONO REGULAR

Sendo R raio da circunferência inscrita, l o lado e a o apótema do hexágono regular inscrito, temos:



$$\text{o triângulo ABO é equilátero} \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{OA} \Rightarrow l = R$$

$$\text{OM é altura do triângulo equilátero} \Rightarrow OM = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$$

## ÁREA DOS POLÍGONOS REGULARES

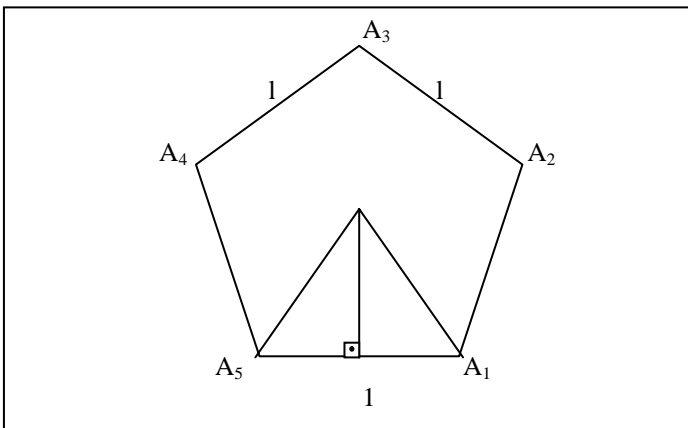
Sendo  $l$  a medida do lado de um polígono regular de  $n$  lados, cujo apótema mede  $a$ , sobre cada lado podemos construir um triângulo de base  $l$  e altura  $a$ . Assim, a área do polígono será igual à soma das áreas dos triângulos assim construídos, ou seja:

$$S = p.a$$

Sendo:

$p \Rightarrow$  semi-perímetro

$a \Rightarrow$  apótema



### EXERCÍCIOS

Calcule a área de um quadrado de 5m de lado.

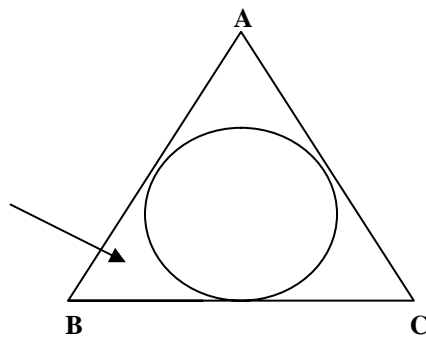
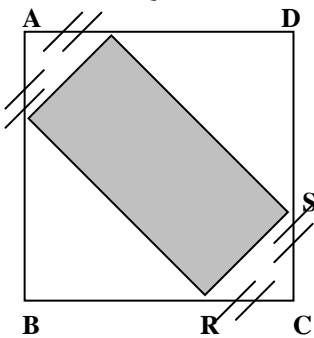
Calcular lado de um quadrado de  $64\text{cm}^2$  de área.

O diâmetro de um círculo vale 10m . calcular a área de um quadrado inscrito neste círculo.

O lado do hexágono regular inscrito em um círculo vale 8cm. Calcular a área do quadrado inscrito nesse círculo.

5- (UFSE) seja o retângulo PQRS inscrito no quadrado ABCD, conforme a figura abaixo.

Se  $PS = 2$ ,  $PQ$  e  $AD = 6$  cm, a área do retângulo PQRS é em  $\text{cm}^2$  :



O triângulo ABC da figura acima é equilátero de lado 8cm. Determinar a área assinalada.

Resp.: 1)  $25\text{m}^2$

2) 8cm

3)  $50\text{m}^2$

4) C

5)  $48\sqrt{3} - 16\pi$

9

